Methode des developpements asymptotiques pour un probleme de plaque thermoelastique

Christophe Lebeltel

► **To cite this version:**

Christophe Lebeltel. Methode des developpements asymptotiques pour un probleme de plaque thermoelastique. RR-1108, INRIA. 1989. inria-00075451

HAL Id: inria-00075451

https://hal.inria.fr/inria-00075451

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNITE DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1108

Programme 7
Calcul Scientifique,
Logiciels Numériques et Ingénierie Assistée

METHODE DES DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES POUR UN PROBLEME DE PLAQUE THERMOELASTIQUE.

Christophe LEBELTEL

Octobre 1989

RR_1108

METHODE DES DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES
POUR UN PROBLEME
DE PLAQUE THERMOELASTIQUE.

Christophe LEBELTEL*

Résumé :

Dans ce rapport, nous nous intéressons à un problème de plaque thermoélastique régie par une loi de comportement, une équation de mouvement et une équation de chaleur. Nous appliquons à ce problème la méthode des développements asymptotiques sous différentes hypothèses de mises à l'échelle. Plus particulièrement, nous étudions dans quelle mesure l'on peut obtenir un problème 2D couplant un terme de déplacement et un terme de température.

ASYMPTOTIC EXPANSION METHOD FOR A PROBLEM OF A THERMOELASTIC
FLAT PLATE

Abstract :

This report deals with a problem of a thermoelastic plate governed by a constitutive equation, a movement equation and heat equation.

The asymptotic expansion method is applied to the problem under different hypotheses of scalings. More particularly, we study the extent to which it is possible to obtain a 2D problem coupling a term of displacement and a term of heat.

*Doctorant projet MODULEF

PAPIER RÉCUPÉRÉ ET RECYCLÉ

Sommaire

Introduction :

L'étude faite dans le présent rapport consiste à appliquer la méthode des développements asymptotiques à un problème de plaque thermoélastique, soumise à des forces de surface, de volume, et à un flux de chaleur sur ses deux surfaces supérieure et inférieure. Nous considérons le cas de la thermoélasticité linéarisée.

Notre point de vue, ici, est formel et par conséquent, ne comporte pas de justification par une étude de convergence.

Un tel problème a été étudié par la méthode des hypothèses a priori (cf [Henry;1976]). Dans quelle mesure peut-on obtenir des équations du même type, c'est à dire des équations couplées entre un terme de température (θ) et un terme de déplacement vertical (ω) ?

$$\ddot{\omega} + \Delta^2\omega + \lambda_1 \Delta\theta = f$$
$$\dot{\theta} - \Delta\theta + \lambda_2\theta - \lambda_3 \Delta\dot{\omega} = g$$

où la notation $\dot{X}$ désigne $\frac{dX}{dt}$, λ_1, λ_2 et λ_3 sont des constantes connues et f et g des fonctions connues en fonction des forces.

Pour cela, nous considérerons différents changements d'échelle pour les inconnues et les données.

Le problème que nous traitons est une extension de celui posé dans [Blanchard & Francfort, 1987]. Ces auteurs établissent des résultats de convergence pour les composantes du déplacement, la température et les contraintes de Piola-Kirchhoff.

La différence se situe au niveau d'une des conditions aux limites portant sur la température.

L'une de nos conditions s'écrit en effet $k\,\partial_{n^\epsilon}\theta^\epsilon + \gamma^\epsilon\,(\theta^\epsilon - \theta^{\pm\epsilon}) = q^{\pm\epsilon}$ sur $\Gamma^{\pm\epsilon}$, $\Gamma^{+\epsilon}$ (resp. $\Gamma^{-\epsilon}$) étant la surface supérieure (resp. inférieure) de la plaque d'épaisseur 2ϵ.

Dans [Blanchard & Francfort ; 1987], cette condition aux limites apparait comme un cas particulier de celle que nous avons choisie, en prenant $\gamma^\epsilon = 0$ et $q^{\pm\epsilon} = 0$.

Comme nous allons le voir, l'application de la méthode des développements asymptotiques ne permet pas d'obtenir le système de deux équations couplées, tout au moins avec les mises à l'échelle que nous avons considérées.

Nous pouvons cependant, dans certains cas, obtenir l'une d'entre elles.

Position du problème - notations - hypothèses.

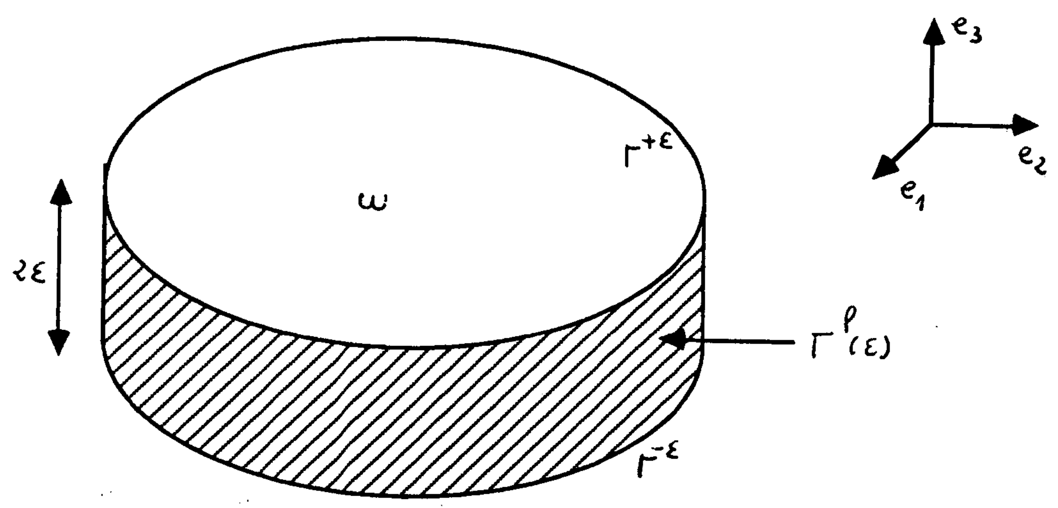
Les notations suivantes sont issues de [Blanchard & Francfort ; 1987]. **Nous** utiliserons les deux conventions habituelles :

- . indice latin $\in \{1;2;3\}$
  . indice grec $\in \{1;2\}$
- la convention de sommation

Ainsi, $\forall$b tenseur, $\quad \mathrm{Tr}\, b = b_{ii}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathrm{tr}\, b = b_{\alpha\alpha}$

L'espace est rapporté à une base (e_1, e_2, e_3).



$\Omega^{\epsilon} = \omega \times]-\epsilon, \epsilon[$

$\Gamma^{\pm\epsilon} = \omega \times \{\pm \epsilon\}$

$\Gamma^{\ell}(\epsilon) = \partial\omega \times]-\epsilon, \epsilon[$

On suppose le matériau homogène.
On notera Ω, $\Gamma^{\pm}$, Γ^{ℓ} les ensembles Ω^1, $\Gamma^{\pm 1}$, $\Gamma^{\ell}(1)$. Ω sera dit ouvert **fixe**.
Si $y = (x_1, x_2)$, au point $x^{\epsilon} = (y, \epsilon x_3)$ de Ω^{ϵ}, on associe le point $x = (y, x_3)$ de Ω.
On définit les espaces :

$H(\epsilon) = \{v \in H^1(\Omega^{\epsilon}),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma^{\ell}(\epsilon)\}$

$\mathbb{H}(\epsilon) = [H(\epsilon)]^3$

$Y(\epsilon) = \{\tau = [L^2(\Omega^{\epsilon})]^9,\ \tau \text{ symétrique}\}$.

De même, on notera H, |H, Y les espaces H (1), |H (1), Y (1).

$e_{ij}(u)(x) = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j)(x)$ est le tenseur linéarisé des déformations.

<u>La plaque vérifie les équations 3D</u> :

loi de comportement : $e_{ij}(u^\epsilon) - \alpha^\epsilon \theta^\epsilon \delta_{ij} = \frac{1+\nu^\epsilon}{E^\epsilon} \sigma^\epsilon_{ij} - \frac{\nu^\epsilon}{E^\epsilon} \mathrm{Tr}\sigma^\epsilon \delta_{ij}$ dans Ω^ϵ.

l'équation du mouvement : $\rho^\epsilon \ddot{u}^\epsilon_i = \partial^\epsilon_j \sigma^\epsilon_{ij} + f^\epsilon_i$ dans Ω^ϵ.

l'équation de chaleur : $\beta^\epsilon \dot{\theta}^\epsilon = \frac{k^\epsilon}{T_0} \partial^\epsilon_{ij} \theta^\epsilon - \frac{E^\epsilon \alpha^\epsilon}{1-2\nu^\epsilon} \mathrm{Tr}\, e(\dot{u}^\epsilon)$ dans Ω^ϵ.

où ν^ϵ est le rapport de Poisson.
E^ϵ est le module d'Young.
α^ϵ est le coefficient de dilatation thermique.
ρ^ϵ est la densité de masse.
f^ϵ_i désignent les composantes de la densité de forces volumiques.
β^ϵ est le coefficient de chaleur spécifique.
k^ϵ est le coefficient de conductivité de la chaleur.
u^ϵ est le champ de déplacement.
σ^ϵ est le deuxième tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.
θ^ϵ est la température à l'intérieur de la plaque.

On suppose que, pour la famille de plaques considérée, il existe des valeurs ν, E, α, β, k indépendantes de ϵ telles que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \nu^\epsilon = \nu,\ E^\epsilon = E,\ \alpha^\epsilon = \alpha,\ \beta^\epsilon = \beta,\ k^\epsilon = k.$$

De plus, on suppose que :

$$\exists \rho \in \mathbb{R}^*_+,\ \forall \epsilon > 0,\ \rho^\epsilon = \rho\epsilon^2$$

Cette dernière condition se justifie a postériori pour obtenir une équation couplant $\frac{\partial^2 u^\epsilon_3}{\partial t^2}$ et $\Delta^2 u^\epsilon_3$ ([Raoult ; 1980]).

On impose à la plaque les

<u>conditions aux bords</u> :

$$\sigma^\epsilon_{i3} = \pm g^{\pm\epsilon}_i \text{ sur } \Gamma^{\pm\epsilon}$$

$$k\, \partial^\epsilon_3 \theta^\epsilon + \gamma^\epsilon (\theta^\epsilon - \theta^{\pm\epsilon}) = q^{\pm\epsilon} \text{ sur } \Gamma^{\pm\epsilon}$$

$$\theta^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell(\epsilon)$$

$$u^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell(\epsilon)$$

où $g_i^{\pm\epsilon}$ désignent les composantes de la densité de forces surfaciques.

$\gamma^\epsilon \geq 0$ est un coefficient donné

$\theta^{\pm\epsilon}(x_1,x_2,t)$ sont deux températures supposées connues.

$q^{\pm\epsilon}$ est le flux de chaleur sur $\Gamma^{\pm\epsilon}$ supposé connu.

<u>Les conditions initiales</u>

$u^\epsilon(0) = u_0^\epsilon$

$\dot{u}^\epsilon(0) = v_0^\epsilon$

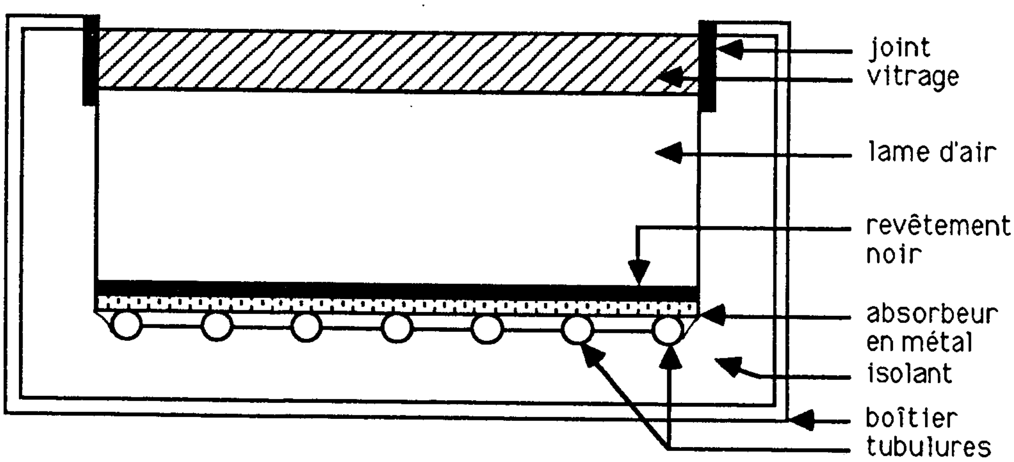
$\theta^\epsilon(0) = \theta_0^\epsilon$

En imposant une régularité suffisante aux données, le modèle 3D admet une solution unique.

<u>Remarque</u> :

La condition aux limites $k\ \partial_{n^\epsilon}\theta^\epsilon + \gamma^\epsilon\ (\theta^\epsilon - \theta^{\pm\epsilon}) = q^{\pm\epsilon}$ sur $\Gamma^{\pm\epsilon}$ est une condition aux limites de flux, couramment utilisée pour traduire les échanges de chaleur.

Le problème exposé ci-dessus s'applique en particulier aux panneaux solaires.



<u>Coupe longitudinale d'un capteur solaire plan</u>

La chaleur qui est captée par la vitre est absorbée par le revêtement noir puis émise vers la glace ; elle est ensuite pour moitié dissipée en pertes de chaleur et pour moitié absorbée de nouveau par le corps noir, qui, par l'intermédiaire de l'absorbeur en métal, la diffuse dans les tubulures, qui en général contiennent de l'eau pour permettre le transport de la chaleur à l'endroit souhaité.

Les températures $\theta^{\pm\epsilon}$ de la condition aux limites représentent la température de la lame d'air ($\theta^{+\epsilon}$) et la température de l'absorbeur ($\theta^{-\epsilon}$).

Changements d'échelle sur les inconnues et les données :

Aux quantités u^ϵ, σ^ϵ, θ^ϵ définies sur Ω^ϵ, on associe $u(\epsilon)$, $\sigma(\epsilon)$, $\theta(\epsilon)$ définies sur Ω d'après les changements suivants :

au vecteur $\vec{w}^\epsilon$ défini sur Ω^ϵ on associe $\vec{w}(\epsilon)$ défini sur Ω par :

$$\vec{w}_\alpha(\epsilon)(x) = \vec{w}^\epsilon_\alpha\ (x^\epsilon)$$
$$\vec{w}_3\ (\epsilon)(x) = \epsilon\ \vec{w}^\epsilon_3\ (x^\epsilon)$$

au tenseur τ^ϵ on associe $\tau(\epsilon)$ défini par :

$$\tau_{\alpha\beta}\ (\epsilon)(x) = \tau^\epsilon_{\alpha\beta}\ (x^\epsilon)$$
$$\tau_{\alpha 3}\ (\epsilon)(x) = \frac{1}{\epsilon}\ \tau^\epsilon_{\alpha 3}\ (x^\epsilon)$$
$$\tau_{3\alpha}\ (\epsilon)(x) = \frac{1}{\epsilon}\ \tau^\epsilon_{3\alpha}\ (x^\epsilon)$$
$$\tau_{33}\ (\epsilon)(x) = \frac{1}{\epsilon^2}\ \tau^\epsilon_{33}\ (x^\epsilon)$$

à θ^ϵ on associe $\theta(\epsilon)$ définie sur Ω par $\theta(\epsilon)(x) = \theta^\epsilon(x^\epsilon)$.

On suppose qu'il existe $\theta^{\pm}$ indépendantes de ϵ et définies sur ω telles que

$$\theta^{\pm\epsilon}(x_1,\ x_2,\ \pm\epsilon) = \theta^{\pm}(x_1, x_2).$$

Soient $f_i(\epsilon)$ et $g^{\pm}_i(\epsilon)$ les quantités définies sur Ω correspondant à f^ϵ_i et $g^{\pm\epsilon}_i$ d'après le changement d'échelle imposé à $\vec{w}^\epsilon$ ci-dessus.

Suivant [Blanchard & Francfort ; 1987] nous introduisons les hypothèses :

Il existe des fonctions F_i et $G^{\pm}_i$ indépendantes de ϵ et définies respectivement sur Ω et ω telles que :

$$f_\alpha(\epsilon) = F_\alpha \qquad \frac{1}{\epsilon}\ g^{\pm}_\alpha(\epsilon) = G^{\pm}_\alpha$$
$$\frac{1}{\epsilon^2}\ f_3(\epsilon) = F_3 \qquad \frac{1}{\epsilon^3}\ g^{\pm}_3\ (\epsilon) = G^{\pm}_3$$

De même, on suppose qu'il existe $Q^{\pm}$ indépendantes de ϵ et définies sur ω telles que : $\frac{1}{\epsilon}\ q^{\pm\epsilon} = Q^{\pm}$.

Aux données initiales u^ϵ_0, v^ϵ_0 et θ^ϵ_0 définies sur Ω^ϵ, on associe les fonctions $u_0(\epsilon)$, $v_0(\epsilon)$, $\theta_0(\epsilon)$ définies sur Ω par les changements d'échelle définissant $\vec{w}(\epsilon)$ et $\theta(\epsilon)$.

Pour le parmètre γ^ϵ, on va poser successivement trois changements d'échelle $\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$, $\gamma^\epsilon = \gamma$ puis $\gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon$, qui correspondront aux première, deuxième et troisième partie. Enfin, dans la quatrième et dernière partie, nous proposerons un autre changement d'échelle sur les termes de contraintes.

Notre point de vue étant formel, nous supposerons que les termes inconnus $(u(\epsilon),\ \sigma(\epsilon),\ \theta(\epsilon))$ ont une régularité suffisante pour que les équations aient un sens.

PREMIERE PARTIE : $\gamma^{\epsilon} = \epsilon\gamma$

On fait l'hypothèse $\gamma^{\epsilon} = \epsilon\gamma$ où γ est une valeur positive indépendante de ϵ, c'est à dire que γ^{ϵ} est proportionnel à l'épaisseur de la plaque.

1. Passage à l'ouvert fixe dans les équations :

La loi de comportement s'écrit :

$$e_{\alpha\beta}(u(\epsilon)) - \alpha\,\theta(\epsilon)\,\delta_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{\alpha\beta}(\epsilon) - \frac{\nu}{E}\,(\mathrm{tr}\,\sigma(\epsilon) + \epsilon^2\sigma_{33}(\epsilon))\,\delta_{\alpha\beta}$$

$$e_{\alpha 3}(u(\epsilon)) = \epsilon^2\,\frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{\alpha 3}(\epsilon) \qquad \text{dans } \Omega$$

$$e_{33}(u(\epsilon)) - \epsilon^2\alpha\theta(\epsilon) = \epsilon^4\,\frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{33}(\epsilon) - \frac{\nu}{E}\,\epsilon^2\,(\mathrm{tr}\sigma(\epsilon) + \epsilon^2\,\sigma_{33}(\epsilon))$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$\epsilon^2\,\rho\,\ddot{u}_\alpha(\epsilon) = \partial_j\sigma_{\alpha j}(\epsilon) + F_\alpha$$

$$\rho\,\ddot{u}_3(\epsilon) = \partial_j\sigma_{3j}(\epsilon) + F_3 \qquad \text{dans } \Omega$$

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\beta\,\dot{\theta}(\epsilon) = \frac{k}{T_0}\,(\partial_{\alpha\alpha}\theta(\epsilon) + \frac{1}{\epsilon^2}\,\partial_{33}\theta(\epsilon)) - \frac{E\alpha}{1-2\nu}\,(\mathrm{tr}\,e(\dot{u}(\epsilon)) + \frac{1}{\epsilon^2}\,\partial_3\dot{u}_3(\epsilon)) \text{ dans } \Omega.$$

Les conditions aux bords s'écrivent

$$\sigma_{\alpha 3}(\epsilon) = \pm\, G_\alpha^{\pm} \qquad \text{sur } \Gamma^{\pm}$$

$$\sigma_{33}(\epsilon) = \pm\, G_3^{\pm} \qquad \text{sur } \Gamma^{\pm}$$

$$\frac{k}{\epsilon}\,\partial_3\theta(\epsilon)\,n_3 + \epsilon\gamma\,(\theta(\epsilon) - \theta^{\pm}) = \epsilon\,Q^{\pm} \quad \text{sur } \Gamma^{\pm}$$

$$\theta(\epsilon) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^{\ell}$$

$$u(\epsilon) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^{\ell}$$

Les conditions initiales s'écrivent :

$u(\epsilon)(o) = u_0(\epsilon)$

$\dot{u}(\epsilon)(o) = v_0(\epsilon)$ dans Ω

$\theta(\epsilon)(o) = \theta_0(\epsilon)$

2. Formulation variationnelle :

Loi de comportement :

$\forall\ \psi \in Y$,

$$\int_\Omega e_{ij}(u(\epsilon))\ \psi_{ij}dx - \int_\Omega(\frac{1+\nu}{E}\ \sigma_{\alpha\beta}(\epsilon) - \frac{\nu}{E}\ tr\sigma(\epsilon)\ \delta_{\alpha\beta})\ \psi_{\alpha\beta}dx - \int_\Omega \alpha\theta(\epsilon)\ \delta_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta}dx$$

$$+ \epsilon^2[\int_\Omega(\ \frac{\nu}{E}\ \sigma_{33}(\epsilon)\delta_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta} - 2\ \frac{1+\nu}{E}\ \sigma_{\alpha3}(\epsilon)\ \psi_{\alpha3} + \frac{\nu}{E}\ tr\sigma(\epsilon)\psi_{33})dx - \int_\Omega\alpha\theta(\epsilon)\psi_{33}dx]$$

$$- \epsilon^4 \int_\Omega \frac{1}{E}\ \ \sigma_{33}(\epsilon)\ \psi_{33}\ dx = 0$$

Equation du mouvement :

$\forall\ W \in \mathbb{H}$,

$$\int_\Omega \rho\ \ddot{u}_3(\epsilon)\ W_3 + \int_\Omega \sigma_{ij}(\epsilon)\ e_{ij}(W) - \int_\Omega F_iW_i - \int_{\Gamma^\pm} G_i^\pm W_i + \epsilon^2 \int_\Omega \rho\ddot{u}_\alpha(\epsilon)\ W_\alpha = 0.$$

Equation de la chaleur :

$\forall\ Z \in H$,

$$\frac{k}{T_0} \int_\Omega \partial_3\theta(\epsilon)\partial_3 Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \int_\Omega\partial_3\dot{u}_3(\epsilon)Z + \epsilon^2\ [\int_\Omega \beta\ \dot{\theta}(\epsilon)Z + \frac{k}{T_0} \int_\Omega\partial_\alpha\theta(\epsilon)\partial_\alpha Z +$$

$$\frac{E\ \alpha}{1-2\nu} \int_\Omega \partial_\alpha\dot{u}_\alpha(\epsilon)\ Z + \frac{1}{T_0} \int_{\Gamma^+}(\gamma(\theta(\epsilon)\ -\theta^+)-Q^+)Z + \frac{1}{T_0} \int_{\Gamma^-}(\gamma(\theta(\epsilon)-\theta^-)-Q^-)Z] = 0$$

On pose formellement un développement des termes inconnus suivant les puissances de ϵ :

$$\begin{aligned} u\ (\epsilon) &= u^0 + \epsilon u^1 + \epsilon^2 u^2 + \dots \\ \sigma\ (\epsilon) &= \sigma^0 + \epsilon\sigma^1 + \epsilon^2\ \sigma^2 + \dots \\ \theta\ (\epsilon) &= \theta^0 + \epsilon\ \theta^1 + \epsilon^2\theta^2 + \dots \end{aligned} \qquad (1)$$

3. Développement à l'ordre ϵ^0 :

3.1. Formulation variationnelle pour les termes d'ordre ϵ^0 :

On reporte (1) dans les équations écrites sous forme variationnelle. En identifiant les coefficients des termes en ϵ^0, il vient :

$$\forall\ (\psi_{\alpha\beta}) \in Y, \int_\Omega(\frac{1+\nu}{E}\ \sigma^0_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\ tr\sigma^0\delta_{\alpha\beta})\ \psi_{\alpha\beta} + \int_\Omega \alpha\theta^0\delta_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta} - \int_\Omega e_{\alpha\beta}(u^0)\ \psi_{\alpha\beta} = 0 \qquad (1_a)$$

$$\forall\ (\psi_{\alpha3}) \in Y,\ \int_\Omega (\partial_\alpha\ u^0_3 + \partial_3\ u^0_\alpha\ )\ \psi_{\alpha3} = 0 \qquad (1_b)$$

$$\forall\ (\psi_{33}) \in Y,\ \int_\Omega \partial_3\ u^0_3\ \psi_{33} = 0 \qquad (1_c)$$

$$\forall\ (W_\alpha) \in \mathbb{H},\ \int_\Omega \sigma^0_{i\alpha}\ \partial_i W_\alpha = \int_\Omega F_\alpha W_\alpha + \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_\alpha\ W_\alpha \qquad (1_d)$$

$$\forall\ (W_3) \in \mathbb{H},\ \int_\Omega \rho\ \ddot{u}^0_3\ W_3 + \int_\Omega \sigma^0_{i3}\ \partial_i W_3 = \int_\Omega F_3W_3 + \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_3\ W_3 \qquad (1_e)$$

$$\forall\ Z \in H,\ \frac{k}{T_0} \int_\Omega \partial_3\ \theta^0\partial_3 Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \int_\Omega \partial_3\ \dot{u}^0_3\ Z = 0 \qquad (1_f)$$

3.2. Forme de u^0 :

D'après (1_c), $\partial_3\, u_3^0 = 0$ donc $u_3^0 = \zeta_3^0\ (x_1,x_2,t) \in H^2(0,T,H^4(\omega))$

$\forall t$, $u_3^0(t) = 0$ sur Γ^ℓ donc $\zeta_3^0(t) \in H_0^1(\omega)$

D'après (1_b), $\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0 = 0$

donc $\partial_{33} u_\alpha^0 = 0$, donc $u_\alpha^0 = \zeta_\alpha^0 + x_3\, \tilde{\zeta}_\alpha^0$ où ζ_α^0, $\tilde{\zeta}_\alpha^0 \in H^2(0,T,H^4(\omega))$

$\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0 = 0 = \partial_\alpha \zeta_3^0 + \tilde{\zeta}_\alpha^0 = -\partial_\alpha\, \zeta_3^0 = \tilde{\zeta}_\alpha^0$

or, $u_\alpha^0 = 0$ sur Γ^ℓ donc $\forall t$, $\zeta_\alpha^0(t)$ et $\tilde{\zeta}_\alpha^0(t) \in H_0^1\ (\omega)$ d'où $\zeta_3^0(t) \in H_0^2(\omega)$.

Finalement,

$$u_\alpha^0 = \zeta_\alpha^0 - x_3\, \partial_\alpha \zeta_3^0 \qquad \zeta_\alpha^0 \in H^2(0,T,H_0^1(\omega))$$
$$\text{où}$$
$$u_3^0 = \zeta_3^0 \qquad \zeta_3^0 \in H^2(0,T,H_0^2(\omega))$$

C'est un champ de Kirchhoff-Love.

3.3. Forme de θ^0 :

$(1_f) \iff \int_\Omega \partial_3\theta^0\partial_3\ Z = 0 \quad \forall\ Z \in H$

c'est à dire $-\int_\Omega \partial_{33}\theta^0 Z + \int_{\Gamma^\pm} \partial_3\theta^0 n_3\ Z = 0$

donc $\partial_{33}\theta^0 = 0$ dans Ω, d'où $\theta^0 = \xi^0 + x_3\tilde{\xi}^0$ où ξ^0, $\tilde{\xi}^0 \in H^1(0,T,H^1(\omega))$

or, $\theta^0|_{\Gamma^\ell} = 0$ donc ξ^0, $\tilde{\xi}^0 \in H^1(0,T,H_0^1(\omega))$.

$(1_f) \Rightarrow \partial_3\theta^0 = 0$ sur $\Gamma^\pm$, c'est à dire $\tilde{\xi}^0 = 0$.
donc $\theta^0 = \xi^0 \in H^1(0,T,H_0^1(\omega))$.

3.4. Calcul de $\sigma_{\alpha\beta}^0$:

D'après (1_a), $\frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{\alpha\beta}^0 - \frac{\nu}{E}\ \mathrm{tr}\sigma^0\ \delta_{\alpha\beta} + \alpha\theta^0\delta_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta}(u^0) = 0$

donc $\sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{E}{1+\nu}\, e_{\alpha\beta}\ (u^0) + \frac{E\nu}{1-\nu^2}\ \mathrm{tr}\, e(u^0)\ \delta_{\alpha\beta} - \frac{E\alpha}{1-\nu}\ \theta^0\ \delta_{\alpha\beta}$

$$= \frac{E}{1+\nu}\ \frac{\partial_\alpha(\zeta_\beta^0 - x_3\partial_\beta\zeta_3^0) + \partial_\beta(\zeta_\alpha^0 - x_3\partial_\alpha\zeta_3^0)}{2} + \frac{E\nu}{1-\nu^2}\ \partial_\mu(\zeta_\mu^0 - x_3\ \partial_\mu\zeta_3^0)\ \delta_{\alpha\beta}$$
$$- \frac{E\alpha}{1-\nu}\ \xi^0\ \delta_{\alpha\beta}$$

$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2}\, n_{\alpha\beta}^0(x_1,x_2,t) + \frac{3}{2}\, x_3\ m_{\alpha\beta}^0(x_1,x_2,t)$ avec

$$n_{\alpha\beta}^0 = \frac{2E}{1-\nu^2}\ \left((1-\nu)\ \frac{\partial_\alpha\zeta_\beta^0 + \partial_\beta\zeta_\alpha^0}{2} + \nu\ \partial_\mu\zeta_\mu^0\ \zeta_{\alpha\beta} - \alpha\ (1+\nu)\ \xi^0\ \delta_{\alpha\beta}\right)$$

et $m_{\alpha\beta}^0 = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)}\ \left(\ (1-\nu)\ \partial_{\alpha\beta}\zeta_3^0 + \nu\ \Delta\ \zeta_3^0\ \delta_{\alpha\beta}\right)$

3.5. Obtention de deux problèmes 2D sur ω :

Choisissons : $W_\alpha = x_3 \partial_\alpha \eta_3$ où $\eta_3 \in H_0^2(\omega)$

$W_3 = \eta_3$

(1_d) s'écrit $\int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\, x_3\, \partial_{\alpha\beta}\eta_3 + \int_\Omega \sigma^0_{\alpha 3}\partial_\alpha \eta_3 = \int_\Omega F_\alpha x_3 \partial_\alpha \eta_3 + \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_\alpha\, \partial_\alpha \eta_3 n_3$

(1_e) s'écrit $\int_\Omega \rho\, \ddot{\zeta}^0_3\, \psi_3 + \int_\Omega \sigma^0_{\alpha 3}\partial_\alpha \eta_3 = \int_\Omega F_3 \eta_3 + \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_3\, \eta_3$

d'où, en remplacant $\int_\Omega \sigma^0_{\alpha 3}\partial_\alpha \eta_3$ par son expression fournie par (1_d), il vient

$$\int_\Omega \rho\, \ddot{\zeta}^0_3\, \eta_3 + \int_\Omega F_\alpha x_3 \partial_\alpha \eta_3 + \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_\alpha\, \partial_\alpha \eta_3 n_3 - \int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta} x_3 \partial_{\alpha\beta}\eta_3 - \int_\Omega F_3 \eta_3 - \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_3\, \eta_3 = 0$$

or, $\sigma^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, n^0_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}\, x_3\, m^0_{\alpha\beta}$ donc

$$2 \int_\omega \rho\, \ddot{\zeta}^0_3 \eta_3 + \int_\omega \left(\int_{-1}^1 F_\alpha x_3 dx_3\right)\partial_\alpha \eta_3 + \int_\omega (G^+_\alpha - G^-_\alpha)\partial_\alpha \eta_3 - \int_\omega m^0_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\eta_3 - \int_\omega \left(\int_{-1}^1 F_3 dx_3\right)\eta_3$$

$$-\int_\omega (G^+_3 + G^-_3)\eta_3 = 0.$$

En intégrant par parties et en utilisant l'expression de $m^0_{\alpha\beta}$, il vient :

$$2 \int_\omega \rho \ddot{\zeta}^0_3\, \eta_3 - \int_\omega \left(\int_{-1}^1 x_3 \partial_\alpha F_\alpha dx_3\right)\eta_3 - \int_\omega \partial_\alpha (G^+_\alpha - G^-_\alpha)\, \eta_3 + \frac{2\,E}{3(1-\nu^2)} \int_\omega \Delta^2 \zeta^0_3 \eta_3$$

$$- \int_\omega \left(\int_{-1}^1 F_3 dx_3\right)\eta_3 - \int_\omega (G^+_3 + G^-_3)\, \eta_3 = 0.$$

D'où l'on déduit l'équation qui détermine ζ^0_3 :

$$2\, \rho\, \ddot{\zeta}^0_3 + \frac{2\,E}{3(1-\nu^2)}\, \Delta^2\, \zeta^0_3 = \int_{-1}^1 x_3 \partial_\alpha F_\alpha dx_3 + \int_{-1}^1 F_3 dx_3 + \partial_\alpha (G^+_\alpha - G^-_\alpha) + G^+_3 + G^-_3 \text{ sur } \omega$$

$\zeta^0_3 = \partial_\alpha \zeta^0_3 = 0$ sur $\partial\omega$

On choisit : $W_\alpha = \eta_\alpha \in H_0^1(\omega)$

$W_3 = 0$

(1_d) s'écrit $\int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\, \partial_\alpha \eta_\alpha = \int_\Omega F_\alpha \eta_\alpha + \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_\alpha\, \eta_\alpha$

donc $\int_\omega n^0_{\alpha\beta}\partial_\beta \eta_\alpha = \int_\omega \left(\int_{-1}^1 F_\alpha dx_3\right)\eta_\alpha + \int_\omega (G^+_\alpha + G^-_\alpha)\, \eta_\alpha$

d'où $\partial_\beta n^0_{\alpha\beta} = -\left(\int_{-1}^1 F_\alpha dx_3\right) - (G^+_\alpha + G^-_\alpha)$ dans ω

$\zeta^0_1 |_{\partial\omega} = \zeta^0_2 |_{\partial\omega} = 0$

(2 équations qui déterminent ζ^0_1 et ζ^0_2 en fonction de ξ^0).

3.6. Calcul de σ^0_{i3} :

Soit $(W_\alpha) \in \mathbb{H}$

(1_d) s'écrit $\int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\, \partial_\beta W_\alpha + \int_\Omega \sigma^0_{\alpha 3}\, \partial_3 W_\alpha = \int_\Omega F_\alpha W_\alpha + \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_\alpha W_\alpha$

donc $\frac{1}{2}\int_\omega n^0_{\alpha\beta}\, (\int_{-1}^1 \partial_\beta W_\alpha dx_3) + \frac{3}{2}\int_\Omega x_3\, m^0_{\alpha\beta}\, \partial_\beta W_\alpha = \int_\Omega F_\alpha W_\alpha + \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_\alpha W_\alpha$

or, $\int_\omega n^0_{\alpha\beta}(\int_{-1}^1 \partial_\beta W_\alpha dx_3) = - \int_\omega \partial_\beta n^0_{\alpha\beta}\, (\int_{-1}^1 W_\alpha dx_3)$

$= \int_\omega \{ [(\int_{-1}^1 F_\alpha dx_3) + (G^+_\alpha + G^-_\alpha)]\, (\int_{-1}^1 W_\alpha dx_3)\}$

donc $\frac{1}{2}\int_\Omega [(\int_{-1}^1 F_\alpha dx_3) + G^+_\alpha + G^-_\alpha]\, W_\alpha - \frac{3}{2}\int_\Omega x_3\, \partial_\beta m^0_{\alpha\beta} W_\alpha - \int_\Omega \partial_3 \sigma^0_{\alpha 3} W_\alpha$
$+ \int_{\Gamma^\pm} \sigma^0_{\alpha 3}\, n_3 W_\alpha = \int_\Omega F_\alpha W_\alpha + \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_\alpha W_\alpha.$

d'où :

$$\partial_3\, \sigma^0_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\, (\int_{-1}^1 F_\alpha dx_3 + G^+_\alpha + G^-_\alpha) - \frac{3}{2}\, x_3\, \partial_\beta\, m^0_{\alpha\beta} - F_\alpha \text{ dans } \Omega$$

$$\sigma^0_{\alpha 3} = G^+_\alpha \text{ sur } \Gamma^+$$

$$\sigma^0_{\alpha 3} = - G^-_\alpha \text{ sur } \Gamma^-$$

qui s'intègre en :

$$\sigma^0_{\alpha 3} = \frac{x_3+1}{2}\, (\int_{-1}^1 F_\alpha dx_3 + G^+_\alpha + G^-_\alpha) + \frac{3}{4}\, (1-x_3^2)\, \partial_\beta m^0_{\alpha\beta} - \int_{-1}^{x_3} F_\alpha(.,.,z) dz - G^-_\alpha$$

Soit $(W_3) \in \mathbb{H}$:

(1_e) s'écrit $\int_\Omega \rho \ddot{\zeta}^0_3\, W_3 + \int_\Omega \sigma^0_{\alpha 3}\, \partial_\alpha W_3 + \int_\Omega \sigma^0_{33} \partial_3 W_3 = \int_\Omega F_3 W_3 + \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_3\, W_3$

donc $\int_\Omega \rho\, \ddot{\zeta}^0_3 W_3 - \int_\Omega \partial_\alpha \sigma^0_{\alpha 3} W_3 - \int_\Omega \partial_3 \sigma^0_{33} W_3 + \int_{\Gamma^\pm} \sigma^0_{33} n_3 W_3 = \int_\Omega F_3 W_3 + \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_3\, W_3$

d'où :

$$\partial_3 \sigma^0_{33} = \rho\, \ddot{\zeta}^0_3 - \partial_\alpha \sigma^0_{\alpha 3} - F_3 \text{ dans } \Omega$$

$$\sigma^0_{33} = G^+_3 \text{ sur } \Gamma^+$$

$$\sigma^0_{33} = - G^-_3 \text{ sur } \Gamma^-$$

qui s'intègre en :

$$\sigma^0_{33} = \int_{-1}^{x_3} (\rho\, \ddot{\zeta}^0_3 - \partial_\alpha \sigma^0_{\alpha 3} - F_3)\, dz - G^-_3$$

or $\int_{-1}^{x_3} \partial_\alpha \sigma^0_{\alpha 3}\, dz = \int_{-1}^{x_3} \{ \frac{s+1}{2}\, (\int_{-1}^1 \partial_\alpha F_\alpha dz + \partial_\alpha G^+_\alpha + \partial_\alpha G^-_\alpha) + \frac{3}{4}\, (1-s^2) \partial_{\alpha\beta} m^0_{\alpha\beta}$
$- \int_{-1}^s \partial_\alpha F_\alpha\, dz - \partial_\alpha G^-_\alpha \}\, ds$

$= (\frac{x_3^2}{4} + \frac{x_3}{2} + \frac{1}{4})\, (\int_{-1}^1 \partial_\alpha F_\alpha dx_3 + \partial_\alpha G^+_\alpha + \partial_\alpha G^-_\alpha) + \frac{3}{4}\, (x_3 - \frac{x_3^3}{3} + \frac{2}{3})\, \partial_{\alpha\beta} m^0_{\alpha\beta}$

$- (x_3+1)\, \partial_\alpha G^-_\alpha - \int_{-1}^{x_3} (\int_{-1}^s \partial_\alpha F_\alpha dz)\, ds.$

Nous avons besoin du calcul intermédiaire suivant :

Soit u une fonction intégrable sur $[-1;1]$.

$$\int_{-1}^{x_3} \left(\int_{-1}^{s} u dz\right) ds = \int_{-1}^{x_3} u\, 1_{[-1,s]}(z)\, dz = \int_{-1}^{x_3}\int_{-1}^{x_3} u\, 1_{[z,x_3]}(s)\, ds\, dz$$

$$= \int_{-1}^{x_3} \left(\int_{-1}^{x_3} 1_{[z,x_3]}(s)\, ds\right) = \int_{-1}^{x_3} (x_3-z)\, u\, dz$$

$$= x_3 \int_{-1}^{x_3} u\, dz - \int_{-1}^{x_3} z\, u\, dz.$$

Alors :

$$\int_{-1}^{x_3} \partial_\alpha \sigma^0_{\alpha 3} = \frac{(x_3+1)^2}{4}\left(\left(\int_{-1}^{1} \partial_\alpha F_\alpha dx_3\right) + \partial_\alpha G^+_\alpha + \partial_\alpha G^-_\alpha\right) + \frac{(x_3+1)^2(2-x_3)}{4}\, \partial_{\alpha\beta} m^0_{\alpha\beta}$$
$$- (x_3+1)\, \partial_\alpha G^-_\alpha - x_3 \int_{-1}^{x_3} \partial_\alpha F_\alpha dz + \int_{-1}^{x_3} z\, \partial_\alpha F_\alpha dz$$

donc :

$$\sigma^0_{33} = (x_3+1)\, \rho\, \ddot{\zeta}^0_3 - \frac{(x_3+1)^2}{4}\left(\left(\int_{-1}^{1} \partial_\alpha F_\alpha dx_3\right) + \partial_\alpha G^+_\alpha + \partial_\alpha G^-_\alpha\right) - \frac{(x_3+1)^2(2-x_3)}{4}\, \partial_{\alpha\beta} m^0_{\alpha\beta}$$
$$+ (x_3+1)\, \partial_\alpha G^-_\alpha + x_3 \int_{-1}^{x_3} \partial_\alpha F_\alpha dz - \int_{-1}^{x_3} z\, \partial_\alpha F_\alpha dz - \int_{-1}^{x_3} F_3 dz - G^-_3 .$$

4. Développement à l'ordre ϵ^1:

4.1. Formulation variationnelle pour les termes d'ordre ϵ^1.

On reporte (1) dans les équations écrites sous forme variationnelle. En identifiant les coefficients des termes en ϵ^1, il vient :

$$\forall (\psi_{\alpha\beta}) \in Y, \int_\Omega \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma^1_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \sigma^1 \delta_{\alpha\beta}\right) \psi_{\alpha\beta} + \int_\Omega \alpha\theta^1\, \delta_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta} - \int_\Omega e_{\alpha\beta}(u^1)\psi_{\alpha\beta} = 0 \quad (2_a)$$

$$\forall (\psi_{\alpha 3}) \in Y, \int_\Omega (\partial_\alpha u^1_3 + \partial_3 u^1_\alpha)\, \psi_{\alpha 3} = 0 \quad (2_b)$$

$$\forall (\psi_{33}) \in Y, \int_\Omega \partial_3 u^1_3\, \psi_{33} = 0 \quad (2_c)$$

$$\forall (W_\alpha) \in \mathbb{H}, \int_\Omega \sigma^1_{i\alpha}\, \partial_i W_\alpha = 0 \quad (2_d)$$

$$\forall (W_3) \in \mathbb{H}, \int_\Omega \rho\, \ddot{u}^1_3\, W_3 + \int_\Omega \sigma^1_{i3}\, \partial_i W_3 = 0 \quad (2_e)$$

$$\forall Z \in H, \frac{k}{T_0} \int_\Omega \partial_3\, \theta^1 \partial_3 Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \int_\Omega \partial_3 \dot{u}^1_3\, Z = 0 \quad (2_f)$$

Ce système de six équations est identique au système $[(1_a)-(1_f)]$ obtenu à l'ordre ϵ^0, avec toutefois la disparition des termes de force. Nous pouvons donc sans calcul donner les résultats suivants :

4.2. Forme de u^1 :

C'est un champ de Kirchhoff-love : $u^1_\alpha = \zeta^1_\alpha - x_3\partial_\alpha\zeta^1_3$

$u^1_3 = \zeta^1_3$

où : $\zeta^1_\alpha \in H^2(0,T,H^1_0(\omega) \cap H^4(\omega))$

$\zeta^1_3 \in H^2(0,T,H^2_0(\omega) \cap H^4(\omega))$

4.3. Forme de θ^1 :

$$\theta^1 = \xi^1 \in H^1(0,T,H^1_0(\omega))$$

4.4. Calcul de $\sigma^1_{\alpha\beta}$:

$$\sigma^1_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, n^1_{\alpha\beta}\,(x_1,x_2,t) + \frac{3}{2}\, x_3\, m^1_{\alpha\beta}\,(x_1,x_2,t) \text{ avec :}$$

$$n^1_{\alpha\beta} = \frac{2E}{1-\nu^2}\left((1-\nu)\,\frac{\partial_\alpha\zeta^1_\beta + \partial_\beta\zeta^1_\alpha}{2} + \nu\,\partial_\mu\zeta^1_\mu\,\delta_{\alpha\beta} - \alpha(1+\nu)\,\xi^1\,\delta_{\alpha\beta}\right)$$

et

$$m^1_{\alpha\beta} = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)}\left((1-\nu)\,\partial_{\alpha\beta}\,\zeta^1_3 + \nu\,\Delta\zeta^1_3\,\delta_{\alpha\beta}\right).$$

4.5. Obtention de deux problèmes 2D sur ω :

Une équation qui détermine ζ^1_3 :

$$2\,\rho\,\ddot{\zeta}^1_3 + \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\,\Delta^2\,\zeta^1_3 = 0 \text{ dans } \omega$$

$$\zeta^1_3 = \partial_\alpha\,\zeta^1_3 = 0 \text{ sur } \partial\omega$$

deux équations qui déterminent ζ^1_1 et ζ^1_2 en fonction de ξ^1 :

$$\partial_\beta\, n^1_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{dans } \omega$$

$$\zeta^1_1 = \zeta^1_2 = 0 \text{ sur } \partial\omega$$

4.6. Calcul de σ^1_{i3} :

$$\sigma^1_{\alpha 3} = \frac{3}{4}\,(1-x_3^2)\,\partial_\beta\, m^1_{\alpha\beta}$$

$$\sigma^1_{33} = (x_3+1)\,\rho\,\ddot{\zeta}^1_3 - \frac{(x_3+1)^2(2-x_3)}{4}\,\partial_{\alpha\beta}\, m^1_{\alpha\beta}$$

5. Développement à l'ordre ϵ^2 :

L'intérêt de pousser le développement à cet ordre est multiple. Il est intéressant de voir si l'on peut continuer à obtenir l'expression du champ de déplacement, des termes de contraintes et des équations 2D sur ω permettant de calculer les composantes du champ de déplacement. Les ordres ϵ^0 et ϵ^1 ne nous ont pas fourni le système d'équations couplées souhaité ; c'est pourquoi nous regardons ce qu'il en est à l'ordre suivant. Enfin, l'ordre ϵ^2 va nous permettre de calculer θ^0. Nous nous contenterons dans cette partie de donner les résultats.

5.1. Formulation variationnelle pour les termes d'ordre ϵ^2 :

L'identification des coefficients des termes d'ordre ϵ^2 donne :

$$\int_\Omega \left(\frac{1+\nu}{E}\,\sigma^2_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\sigma^2\delta_{\alpha\beta}\right)\psi_{\alpha\beta} + \int_\Omega \alpha\theta^2\delta_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta} - \int_\Omega e_{\alpha\beta}(u^2)\psi_{\alpha\beta} - \int_\Omega \frac{\nu}{E}\,\sigma^0_{33}\delta_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta} = 0 \qquad (3_a)$$

$$\int_\Omega (\partial_\alpha u^2_3 + \partial_3 u^2_\alpha)\,\psi_{\alpha 3} - 2\,\frac{1+\nu}{E}\int_\Omega \sigma^0_{\alpha 3}\,\psi_{\alpha 3} = 0 \qquad (3_b)$$

$$\int_\Omega \partial_3 u^2_3\,\psi_{33} + \frac{\nu}{E}\int_\Omega \mathrm{tr}\,\sigma^0\psi_{33} - \int_\Omega \alpha\,\theta^0\,\psi_{33} = 0 \qquad (3_c)$$

$$\int_\Omega \sigma^2_{i\alpha}\,\partial_i W_\alpha + \int_\Omega \rho\,\ddot{u}^0_\alpha\,W_\alpha = 0 \qquad (3_d)$$

$$\int_\Omega \sigma^2_{i3}\,\partial_i W_3 + \int_\Omega \rho\,\ddot{u}^2_3\,W_3 = 0 \qquad (3_e)$$

$$\frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_3\theta^2\partial_3 Z + \frac{E\,\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega \partial_3\,\dot{u}^2_3\,Z + \int_\Omega \beta\,\dot{\theta}^0 Z + \frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_\alpha\theta^0\partial_\alpha Z + \frac{E\,\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega \partial_\alpha\dot{u}^0_\alpha\,Z$$
$$+ \frac{1}{T_0}\int_{\Gamma^+} (\gamma(\theta^0-\theta^+)-Q^+)Z + \frac{1}{T_0}\int_{\Gamma^-} (\gamma(\theta^0-\theta^-)-Q^-)Z = 0 \qquad (3_f)$$

5.2. Forme de u^2 :

$$u^2_3 = \zeta^2_3\,(x_1,x_2,t) + \left(-\frac{\nu}{2E}\,n^0_{\mu\mu} + \alpha\,\xi^0\right)x_3 - \frac{3\nu}{4E}\,x_3^2\,m^0_{\mu\mu}$$

avec : $\zeta^2_3 \in H^2(0,T,H^4(\omega) \cap H^1_0(\omega))$.

$$u^2_\alpha = \frac{\nu}{E}\left(\partial_\alpha n^0_{\mu\mu}\,\frac{x_3^2}{4} + \frac{x_3^3}{4}\,\partial_\alpha\,m^0_{\mu\mu}\right) - \alpha\,\frac{x_3^2}{2}\,\partial_\alpha\xi^0 - \partial_\alpha\zeta^2_3\,x_3 + 2\,\frac{1+\nu}{E}\int_{-1}^{x_3}\sigma^0_{\alpha 3}\,dz$$

$+ \zeta^2_\alpha\,(x_1,x_2,t)$; avec $\zeta^2_\alpha \in H^2(0,T,H^4(\omega))$.

5.3. Forme de θ^2 :

L'équation (3f) fournit :

. une équation qui détermine ξ^0 :

$$\frac{T_0 E\alpha}{k(1-2\nu)} \left(-\frac{\nu}{2E} \dot{n}^0_{\mu\mu} + \alpha\dot{\xi}^0 \right) + \frac{T_0\beta}{k} \dot{\xi}^0 - \Delta\xi^0 + \frac{T_0 E\alpha}{k(1-2\nu)} \partial_\alpha \dot{\zeta}^0_\alpha$$
$$+ \frac{\gamma}{2k} (2\xi^0 - \theta^+ - \theta^-) - \frac{Q^+ + Q^-}{2k} = 0 \qquad \text{sur } \omega.$$

$$\xi^0 \mid_{\partial\omega} = 0$$

. l'expression de θ^2 :

en posant $\tilde{\xi}^2 = \dfrac{3\alpha\nu T_0}{4k(1-2\nu)} \dot{m}^0_{\mu\mu} + \dfrac{T_0 E\alpha}{2k(1-2\nu)} \Delta\dot{\zeta}^0_3 + \dfrac{\gamma}{2k} (\theta^+ - \theta^-) + \dfrac{1}{2k} (Q^+ - Q^-)$,

$$\theta^2 = \xi^2(x_1,x_2,t) + x_3 \tilde{\xi}^2 - \left[\frac{\gamma}{4k} (2\xi^0 - \theta^+ - \theta^-) - \frac{Q^+ + Q^-}{4k} \right] x_3^2 - \frac{T_0 E\alpha}{6k(1-\nu)} \Delta\dot{\zeta}^0_3 x_3^3$$

où $\xi^2 \in H^1(0,T,H^1_0(\omega))$.

5.4. <u>Calcul de $\sigma^2_{\alpha\beta}$</u> :

$$\sigma^2_{\alpha\beta} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \operatorname{tr} e(u^2)\,\delta_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma^0_{33} \delta_{\alpha\beta} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \theta^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{E}{1+\nu} e_{\alpha\beta} (u^2).$$

En explicitant chacun de ces termes, $\sigma^2_{\alpha\beta}$ comprend une partie polynômiale en x_3 et une partie non polynômiale en x_3 (qu'on note $F^2_{\alpha\beta}$) provenant des termes de force contenus dans $\sigma^0_{\alpha 3}$ et σ^0_{33}.

On écrit $\sigma^2_{\alpha\beta} = \dfrac{n^2_{\alpha\beta}}{2} + \dfrac{3}{2} x_3 m^2_{\alpha\beta} + \dfrac{3}{2} x_3^2 r^2_{\alpha\beta} + \dfrac{5}{2} x_3^3 s^2_{\alpha\beta} + F^2_{\alpha\beta}(x_1,x_2,x_3,t)$

où $n^2_{\alpha\beta}$, $m^2_{\alpha\beta}$, $r^2_{\alpha\beta}$, $s^2_{\alpha\beta}$ sont des fonctions de x_1,x_2,t que l'on pourrait expliciter.

5.5. <u>Obtention de deux problèmes 2D sur ω</u> :

$$\frac{2-3\nu}{3(1-\nu)} \rho \,\Delta \ddot{\zeta}^0_3 + \partial_{\alpha\beta} \left(m^2_{\alpha\beta} + s^2_{\alpha\beta} + \left(\int_{-1}^1 x_3 F^2_{\alpha\beta}\, dx_3\right)\right) - 2\rho \ddot{\zeta}^2_3 = 0 \qquad \text{dans } \omega$$

$$\partial_\beta (n^2_{\alpha\beta} + r^2_{\alpha\beta}) = 2\rho \ddot{\zeta}^2_\alpha - \partial_\beta \int_{-1}^1 F^2_{\alpha\beta}\, dx_3 \qquad \text{dans } \omega \;;\; \alpha = 1;2.$$

5.6. <u>Calcul de σ^2_{i3}</u> :

$$\sigma^2_{\alpha 3} = -\frac{x_3}{2} \partial_\beta n^2_{\alpha\beta} + \frac{3}{4} (1-x_3^2)\, \partial_\beta m^2_{\alpha\beta} - \frac{x_3^3}{2} \partial_\beta r^2_{\alpha\beta} + \frac{5}{8} (1-x_3^4)\, \partial_\beta s^2_{\alpha\beta}$$
$$- \partial_\beta \int_{-1}^{x_3} F^2_{\alpha\beta}\, dz + \frac{1}{2} \partial_\beta \int_{-1}^1 F^2_{\alpha\beta}\, dx_3 + \frac{\rho}{2} (1-x_3^2)\, \partial_\alpha \ddot{\zeta}^0_\alpha x_3.$$

$$\sigma_{33}^2 = \frac{x_3^2-1}{4}\, \partial_{\alpha\beta} n_{\alpha\beta}^2 - \frac{3}{4}\, x_3(1-\frac{x_3^2}{3})\, \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}^2 + \frac{x_3^4-1}{8}\, \partial_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta}^2 - \frac{5}{8}\, x_3(1-\frac{x_3^4}{5})\partial_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}^2$$

$$+ x_3\, \partial_{\alpha\beta} \int_{-1}^{x_3} F_{\alpha\beta}^2 dz - \partial_{\alpha\beta} \int_{-1}^{x_3} z F_{\alpha\beta}^2 dz - \frac{1+x_3}{2}\, \partial_{\alpha\beta} \int_{-1}^{1} F_{\alpha\beta}^2 dx_3 + \frac{1}{2}\, \partial_{\alpha\beta} \int_{-1}^{1} x_3\, F_{\alpha\beta}^2 dx_3$$

$$- \frac{\rho}{2}\, (x_3^2-1)\partial_\alpha \ddot{\zeta}_\alpha^0 - \frac{\rho}{2}\, x_3(1-\frac{x_3^2}{3})\Delta\ddot{\zeta}_3^0 + \rho[\ddot{\zeta}_3^2\, x_3 + (-\frac{\nu}{2E}\, \ddot{n}_{\mu\mu}^0 + \alpha\ddot{\xi}^0)\, \frac{x_3^2-1}{2} + \frac{\nu}{6(1-\nu)} x_3^3 \Delta\ddot{\zeta}_3^0]$$

6. Remarques :

On constate que la méthode des développements asymptotiques permet de calculer les termes inconnus jusqu'à un ordre aussi élevé que voulu, à condition de résoudre explicitement ou numériquement les équations que nous avons obtenues :

- Les termes de contraintes sont calculables en intégrant une équation par rapport à x_3.
- Les équations 2D provenant de la formulation variationnelle de l'équation de mouvement sont au nombre de trois, c'est à dire en nombre suffisant pour calculer les termes de déplacement en fonction du terme de température.
- L'équation provenant de la relation de compatibilité de l'équation de la chaleur, c'est à dire des relations sur Γ^+ et Γ^- permettent de calculer le terme de température.

Cependant, à l'ordre ϵ^0, on n'obtient pas d'équation couplée entre un terme de déplacement et un terme de température, du type voulu.
Rappelons les équations obtenues à cet ordre :

$$2\rho\, \ddot{\zeta}_3^0 + \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\, \Delta^2\zeta_3^0 = \int_{-1}^{1} \partial_\alpha F_\alpha x_3 dx_3 + \int_{-1}^{1} F_3 dx_3 + \partial_\alpha(G_\alpha^+ - G_\alpha^-) + G_3^+ + G_3^- \quad \text{dans } \omega$$

$$\zeta_3^0 = \partial_\alpha \zeta_3^0 = 0 \text{ sur } \partial\omega$$

dans cette équation, la température ne figure pas.

et $$\partial_\beta\, n_{\alpha\beta}^0 = -\, (\int_{-1}^{1} F_\alpha dx_3) - (G_\alpha^+ + G_\alpha^-) \text{ dans } \omega \ ;\ \alpha = 1;2$$

$$\zeta_1^1 = \zeta_2^1 = 0 \text{ sur } \partial\omega$$

où $$n_{\alpha\beta}^0 = \frac{2E}{1-\nu^2}\ [\ (1-\nu)\ \frac{\partial_\alpha \zeta_\beta^0 + \partial_\alpha \zeta_\alpha^0}{2} + \nu\ \partial_\mu \zeta_\mu^0\ \delta_{\alpha\beta} - \alpha(1+\nu)\ \xi^0 \delta_{\alpha\beta}]$$

Ces deux équations font intervenir la température ξ^0 mais ne sont pas du type voulu.

A l'ordre ϵ^1 les résultats sont les mêmes, simplifiés par la disparition des termes de force.

A l'ordre ϵ^2, les calculs deviennent plus compliqués et les équations couplant terme de déplacement et terme de température ne sont pas, là non plus, du type de celles souhaitées, C'est pourquoi nous allons poser un autre changement d'échelle sur le paramètre γ^ϵ.

Deuxième Partie : $\gamma^{\epsilon} - \gamma$

Dans cette partie, nous conservons les mêmes hypothèses de changement d'échelle, sauf pour le paramètre γ^{ϵ} pour lequel nous supposons $\gamma^{\epsilon} = \gamma$.

7. Formulation variationnelle :

Elle conserve la même expression que dans la première partie pour la loi de comportement et l'équation de mouvement.

Pour l'équation de chaleur, la formulation variationnelle s'écrit :

$\forall\ Z \in H,$

$$\frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_3\theta(\epsilon)\partial_3 Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega \partial_3\dot{u}_3(\epsilon)Z + \epsilon\,\frac{\gamma}{T_0}\left[\int_{\Gamma^+}(\theta(\epsilon)-\theta^+)Z + \int_{\Gamma^-}(\theta(\epsilon)-\theta^-)Z\right]$$

$$+\ \epsilon^2\left[\int_\Omega \beta\dot{\theta}(\epsilon)Z + \frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_\alpha\theta(\epsilon)\partial_\alpha Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega \partial_\alpha\dot{u}_\alpha(\epsilon)Z - \frac{1}{T_0}\int_{\Gamma^{\pm}} Q^{\pm} Z\right] = 0.$$

On pose le même développement formel des termes inconnus suivant les puissances de ϵ que dans la première partie (cf(1)).

8. Développement à l'ordre ϵ^0 :

En reportant (1) dans les équations écrites sous forme variationnelle et en identifiant les coefficients des termes en ϵ^0, on obtient le même système que [(1a)-(1f)] obtenu à cet ordre dans la première partie. Les résultats sont donc inchangés.

9. Développement à l'ordre ϵ^1 :

9.1. Formulation variationnelle pour les termes d'ordre ϵ^1 :

L'identification des coefficients des termes d'ordre ϵ^1 conduit au système:

$$\forall\ (\psi_{\alpha\beta}) \in Y,\ \int_\Omega\left[\frac{1+\nu}{E}\sigma^1_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma^1\delta_{\alpha\beta}\right]\psi_{\alpha\beta} + \int_\Omega \alpha\theta^1\delta_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta} - \int_\Omega e_{\alpha\beta}(u^1)\psi_{\alpha\beta} = 0 \qquad (4a)$$

$$\forall\ (\psi_{\alpha 3}) \in Y,\ \int_\Omega(\partial_\alpha u^1_3 + \partial_3 u^1_\alpha)\,\psi_{\alpha 3} = 0 \qquad (4b)$$

$$\forall\ (\psi_{33}) \in Y,\ \int_\Omega \partial_3 u^1_3\,\psi_{33} = 0 \qquad (4c)$$

$$\forall\ (W_\alpha) \in \mathbb{H},\ \int_\Omega \sigma^1_{i\alpha}\,\partial_i W_\alpha = 0 \qquad (4d)$$

$$\forall\ (W_3) \in \mathbb{H},\ \int_\Omega \rho\,\ddot{u}^1_3\,W_3 + \int_\Omega \sigma^1_{i3}\,\partial_i W_3 = 0 \qquad (4e)$$

$$\forall\ Z \in H,\ \frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_3\theta^1\partial_3 Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega \partial_3\dot{u}^1_3\,Z + \frac{\gamma}{T_0}\int_{\Gamma^{\pm}}(\theta^0-\theta^{\pm})\,Z = 0 \qquad (4f)$$

9.2. Forme de u_i^1 :

C'est un champ de Kirchhoff-Love : $u_\alpha^1 = \zeta_\alpha^1 - x_3\, \partial_\alpha \zeta_3^1$
$u_3^1 = \zeta_3^1$

où $\zeta_\alpha^1 \in H^2(0,T,H_0^1(\omega) \cap H^4(\omega))$
$\zeta_3^1 \in H^2(0,T,H_0^2(\omega) \cap H^4(\omega))$

9.3. Forme de θ^1 :

(4f) s'écrit :

$$- \frac{k}{T_0} \int_\Omega \partial_{33}\theta^1 Z + \frac{k}{T_0} \int_{\Gamma^\pm} \partial_3 \theta^1 n_3 Z + \frac{\gamma}{T_0} \int_{\Gamma^\pm} (\xi^0 - \theta^{\pm})\, Z = 0$$

donc : . $\partial_{33}\, \theta^1 = 0$ d'où $\theta^1 = \xi^1 + x_3 \tilde{\xi}^1$
avec $\xi^1,\ \tilde{\xi}^1 \in H^1(0,T,H_0^1(\omega))$

. $k\, \tilde{\xi}^1 + \gamma\, (\xi^0 - \theta^+) = 0$ sur ω
$- k\, \tilde{\xi}^1 + \gamma\, (\xi^0 - \theta^-) = 0$ sur ω

Ce système se résout en $\xi^0 = \dfrac{\theta^+ + \theta^-}{2}$ et $\tilde{\xi}^1 = \dfrac{\gamma(\theta^+ - \theta^-)}{2k}$

9.4. Calcul de $\sigma_{\alpha\beta}^1$:

$\sigma_{\alpha\beta}^1$ conserve la même expression, à l'introduction près de $\tilde{\xi}^1$ dans le terme $m_{\alpha\beta}^1$:

$$\sigma_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2}\, n_{\alpha\beta}^1 (x_1,x_2,t) + \frac{3}{2} x_3\, m_{\alpha\beta}^1 (x_1,x_2,t)$$

où $n_{\alpha\beta}^1 = \dfrac{2E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \dfrac{\partial_\alpha \zeta_\beta^1 + \partial_\beta \zeta_\alpha^1}{2} + \nu\, \partial_\mu \zeta_\mu^1 \delta_{\alpha\beta} - \alpha\, (1+\nu)\, \xi^1 \delta_{\alpha\beta} \right]$

et $m_{\alpha\beta}^1 = - \dfrac{2E}{3(1-\nu^2)} \left[(1-\nu)\, \partial_{\alpha\beta} \zeta_3^1 + \nu\, \Delta\, \zeta_3^1 \delta_{\alpha\beta} + \alpha(1+\nu)\, \tilde{\xi}^1 \delta_{\alpha\beta} \right]$

9.5. Obtention de deux problèmes 2D sur ω :

Il suffit de tenir compte du terme supplémentaire en $\tilde{\xi}^1$; il vient :

$$2\, \rho\, \ddot{\zeta}_3^1 + \frac{2E}{3(1-\nu^2)} (\Delta^2\, \zeta_3^1 + \alpha(1+\nu)\, \Delta\tilde{\xi}^1) = 0 \text{ dans } \omega$$

$\zeta_3^1 = \partial_\nu \zeta_3^1 = 0$ sur $\partial\omega$.

$\partial_\beta\, n_{\alpha\beta}^1 = 0$ dans ω

$\zeta_1^1 = \zeta_2^1 = 0$ sur $\partial\omega$

9.6. Calcul de σ^1_{i3} :

$$\sigma^1_{\alpha 3} = \frac{3}{4}\,\partial_\beta\, m^1_{\alpha\beta}\,(1-x_3^2)$$

$$\sigma^1_{33} = \rho\,\zeta^1_3\,(x_3+1) - \frac{1}{4}\,\partial_{\alpha\beta}\, m^1_{\alpha\beta}(x_3+1)^2(2-x_3)$$

10. Développement à l'ordre ϵ^2 :

10.1. Formulation variationnelle pour les termes d'ordre ϵ^2 :

L'identification des coefficients des termes d'ordre ϵ^2 conduit à :

$$\forall\ (\psi_{\alpha\beta})\in Y,\ \int_\Omega [\frac{1+\nu}{E}\sigma^2_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma^2\delta_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta}(u^2) + \alpha\theta^2\delta_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\,\sigma^0_{33}\,\delta_{\alpha\beta}]\ \psi_{\alpha\beta} = 0 \qquad (5a)$$

$$\forall\ (\psi_{\alpha 3}) \in Y,\ \int_\Omega [\ \partial_\alpha u^2_3 + \partial_3 u^2_\alpha - 2\ \frac{1+\nu}{E}\ \sigma^0_{\alpha 3}\ ]\ \psi_{\alpha 3} = 0 \qquad (5b)$$

$$\forall\ (\psi_{33}) \in Y,\ \int_\Omega [\partial_3 u^2_3 + \frac{\nu}{E}\ \mathrm{tr}\ \sigma^0 - \alpha\ \theta^0\ ]\ \psi_{33} = 0 \qquad (5c)$$

$$\forall\ (W_\alpha) \in \mathbb{H},\ \int_\Omega \sigma^2_{i\alpha}\ \partial_i W_\alpha + \rho\ \ddot{u}^0_\alpha\ W_\alpha = 0 \qquad (5d)$$

$$\forall\ (W_3) \in \mathbb{H},\ \int_\Omega \sigma^2_{i3}\ \partial_i W_3 + \rho\ \ddot{u}^2_3\ W_3 = 0 \qquad (5e)$$

$$\forall\ Z \in H,\ \frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_3\theta^2\partial_3 Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega \partial_3\dot{u}^2_3 Z + \frac{1}{T_0}\int_{\Gamma^+_-}(\gamma\theta^1 - \overset{+}{Q}{}^{-})Z + \int_\Omega \beta\dot{\theta}^0 Z +$$
$$\frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_\alpha\theta^0\partial_\alpha Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega \partial_\alpha\dot{u}^0_\alpha\ Z = 0. \qquad (5f)$$

Les cinq premières équations de ce système sont identiques à celles qui leur correspondent dans le développement à l'ordre ϵ^2 de la première partie. C'est pourquoi nous nous limitons à l'équation de la chaleur.

10.2. Forme de θ^2 :

(5f) fournit pour θ^2 la même expression que celle fournie par (3f) dans la première partie.

les deux équations sur Γ^+ et Γ^- s'écrivent :

$$\frac{k}{T_0}\ \partial_3\theta^2 + \frac{1}{T_0}\ (\gamma\ \theta^1 - Q^+) = 0 \text{ sur } \Gamma^+$$

$$-\frac{k}{T_0}\ \partial_3\theta^2 + \frac{1}{T_0}\ (\gamma\ \theta^1 - Q^-) = 0 \text{ sur } \Gamma^-$$

et fournissent la relation de compatibilité :

$$\frac{T_0\ E\alpha}{k(1-2\nu)}\left(-\frac{\nu}{2E}\ \dot{n}^0_{\mu\mu} + \alpha\dot{\zeta}^0_3\right) + \frac{T_0\beta}{k}\ \dot{\zeta}^0 - \Delta\zeta^0 + \frac{T_0\ E\alpha}{k(1-2\nu)}\ \partial_\alpha\dot{\zeta}^0_\alpha + \frac{\gamma}{k}\ \zeta^1 - \frac{Q^+ + Q^-}{2k} = 0 \text{ sur } \omega$$

Cette équation permet de calculer ζ^1 en fonction des termes d'ordre 0 et des données $\overset{+}{Q}{}^{-}$.

11. Remarques :

On constate que le changement d'échelle $\gamma^\epsilon = \gamma$ au lieu de $\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$ n'a apporté que peu de modifications dans les résultats. A l'ordre ϵ^0, les résultats sont les mêmes. A l'ordre ϵ^1, l'une des équations couple un terme de déplacement vertical (ζ_3^1) et un terme de température ($\tilde{\xi}^1$) ;

$$\left| \begin{array}{l} 2\,\rho\, \ddot{\zeta}_3^1 + \dfrac{2E}{3(1-\nu^2)} \left(\Delta^2 \zeta_3^1 + \alpha(1+\nu)\, \Delta\tilde{\xi}^1\right) = 0 \text{ dans } \omega \\ \zeta_3^1 = \partial_\alpha \zeta_3^1 = 0 \text{ sur } \partial\omega \end{array} \right.$$

Cependant, le terme $\tilde{\xi}^1$ est calculé en fonction des données. Nous allons poser un troisième changement d'échelle sur le paramètre γ^ϵ.

Troisième Partie : $\gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon$.

L'hypothèse de changement d'échelle sur γ^ϵ est ici $\gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon$. Pour les autres données et les inconnues, les changements d'échelle restent les mêmes.

12. Formulation variationnelle :

Seule la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur est modifiée. Elle s'écrit :

$\forall\ Z \in H,$

$$\frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_3\theta(\epsilon)\partial_3 Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega \partial_3\dot{u}_3(\epsilon)Z + \frac{\gamma}{T_0}\int_{\Gamma^+_-}(\theta(\epsilon)-\theta^{\pm})\,Z + \epsilon^2\ [\int_\Omega \beta\dot{\theta}(\epsilon)Z +$$

$$\frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_\alpha\theta(\epsilon)\partial_\alpha Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega \partial_\alpha\dot{u}_\alpha(\epsilon)Z - \frac{1}{T_0}\int_{\Gamma^+_-} \overset{+}{Q^-} Z\ ] = 0.$$

on pose le même développement formel des termes inconnus suivant les puissances de ϵ que dans les parties précédentes.

13. Développement à l'ordre ϵ^0 :

13.1. Formulation variationnelle pour les termes d'ordre ϵ^0 :

En reportant (1) dans les équations écrites sous forme variationnelle et en identifiant les coefficients des termes en ϵ^0, on obtient le même système que celui obtenu à cet ordre dans les parties précédentes, exception faite de l'équation de la chaleur qui s'écrit :

$\forall\ Z \in H,$

$$\frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_3\theta^0\partial_3 Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega \partial_3\dot{u}^0_3\ Z + \frac{\gamma}{T_0}\int_{\Gamma^+_-}(\theta^0 - \overset{+}{\theta^-})Z = 0$$

Les résultats sont donc les mêmes que ceux déjà obtenus sauf pour la température, dont nous détaillons le calcul.

13.2. Forme de θ^0 :

L'équation de la chaleur entraine :

- $-\dfrac{k}{T_0}\partial_{33}\theta^0 = 0$, d'où $\theta^0 = \xi^0 + x_3\tilde{\xi}^0$
  avec $\xi^0,\ \tilde{\xi}^0 \in H^1(0,T,H^1_0(\omega))$

- $k\tilde{\xi}^0 + \gamma\ (\xi^0 + \tilde{\xi}^0 - \theta^+) = 0$
  $-\ k\ \tilde{\xi}^0 + \gamma\ (\xi^0 - \tilde{\xi}^0 - \theta^-) = 0$

Ce système détermine algébriquement ξ^0 et $\tilde{\xi}^0$.

Remarque :

Le terme $\tilde{\xi}^0$ va introduire un terme supplémentaire dans l'expression de $\sigma^0_{\alpha\beta}$ ainsi que dans la première des équations 2D comme on l'a vu au §9.

14. Développement à l'ordre ϵ^1 :

L'identification des coefficients des termes en ϵ^1 conduit à un système identique à celui de l'ordre ϵ^0, avec l'abandon des termes de forces. Les résultats sont donc les mêmes que ceux déjà obtenus. En particulier, la température θ^1 est affine par rapport à x_3 et se détermine algébriquement.

Nous ne donnons pas les résultats à l'ordre supérieur car ils n'apportent rien de nouveau par rapport à ceux obtenus dans les parties précédentes et en particulier ne donnent pas les équations couplées souhaitées.

15. Remarques :

Aux ordres ϵ^0 et ϵ^1, on obtient l'une des équations couplées.

ordre ϵ^0 :
$$2\rho\, \ddot{\zeta}_3^0 + \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \left(\Delta^2 \zeta_3^0 + \alpha(1+\nu)\, \Delta\tilde{\xi}^0\right) = 0 \text{ dans } \omega$$
$$\zeta_3^0 = \partial_\alpha \zeta_3^0 = 0 \text{ sur } \partial\omega$$

ordre ϵ^1 :
$$2\rho\, \ddot{\zeta}_3^1 + \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \left(\Delta^2 \zeta_3^1 + \alpha(1+\nu)\, \Delta\tilde{\xi}^1\right) = 0 \text{ dans } \omega$$
$$\zeta_3^1 = \partial_\alpha \zeta_3^1 = 0 \text{ sur } \partial\omega$$

Cependant, le terme de température qui intervient dans ces équations ($\tilde{\xi}^0$ ou $\tilde{\xi}^1$) est connu en fonction des données en résolvant un système linéaire. Notons que ce fait se produit dans [Henry;1976] où l'on aboutit aux relations :

$$-\left[\frac{\partial T}{\partial x_3}\right]_{+h} = k_1\, (T_1 - T')$$

$$-\left[\frac{\partial T}{\partial x_3}\right]_{-h} = -\, k_2\, (T_2 - T'')$$

Dans ces équations, T représente la température θ, T' et T" représentent θ^+ et θ^- et T_1 et T_2 sont T(h) et T(-h) avec l'hypothèse $T = \theta_0 + x_3\theta_1$ et h étant la demi-épaisseur de la plaque.

Ainsi, ces relations s'écrivent encore :
$$-\,\theta_1 = k_1\, (\theta_0 + h\theta_1 - T')$$
$$-\,\theta_1 = -\, k_2\, (\theta_0 - h\theta_1 - T'')$$

Dans [Henry;1976], ce système n'est pas résolu mais il apparait clairement qu'il permet de déterminer algébriquement θ_0 et θ_1.

Ainsi, les deux équations de couplage obtenues dans [Henry;1976] et qui s'écrivent :

$$\frac{\rho_s}{D} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \Delta^2 \omega + \alpha(1+\nu)\, \Delta\theta_1 = \hat{f}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \Delta\theta_1 + \lambda_3\theta_1 - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\omega) = \hat{g}$$

portent sur deux termes dont l'un, θ_1, est déterminé algébriquement par ailleurs.

Cela se produit aussi dans [Inan;1972] où l'on aboutit à un système linéaire qui n'est pas résolu.

Enfin, dans [Henry;1976], on considère l'équation de la chaleur vérifiée par θ_0, qui s'écrit : $\frac{\partial \theta_0}{\partial t} - \Delta\theta_0 = \left(\frac{Q}{k}\right)_0$ (*) où $\left(\frac{Q}{k}\right)_0$ est l'apport de chaleur par unité de volume et par unité de temps sur la fibre moyenne, en $x_3 = 0$.
Or, la résolution du système linéaire donne θ_0 en fonction des données T' et T".
(*) peut donc s'écrire comme une relation restrictive sur ces deux données.
A t-elle une signification physique ?

Quatrième Partie : autre changement d'échelle sur les contraintes

Dans cette dernière partie, on suppose que le changement d'échelle pour les termes de contraintes est $\sigma_{ij}(\epsilon)(x) = \sigma^{\epsilon}_{ij}(x^{\epsilon})$ $\forall$ i,j.

Pour le paramètre γ^{ϵ}, on suppose $\gamma^{\epsilon} = \epsilon\gamma$, c'est à dire l'hypothèse faite dans la première partie.

Pour les autres quantités, nous conservons les mêmes hypothèses de changement d'échelle. Cette mise à l'échelle des contraintes provient de [Damlamian;1987] ; il nous a paru intéressant de voir à quels résultats elle menait pour notre problème.

16. Passage à l'ouvert fixe :

La loi de comportement s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} e_{\alpha\beta}(u(\epsilon)) - \alpha\,\theta(\epsilon)\,\delta_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta}(\epsilon) - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\sigma(\epsilon)\,\delta_{\alpha\beta} \\ e_{\alpha 3}(u(\epsilon)) = \frac{1+\nu}{E}\,\epsilon\,\sigma_{\alpha 3}(\epsilon) \\ e_{33}(u(\epsilon)) - \alpha\epsilon^2\theta(\epsilon) = \epsilon^2\frac{1+\nu}{E}\sigma_{33}(\epsilon) - \epsilon^2\frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\,\sigma(\epsilon) = \epsilon^2\left(\frac{1}{E}\sigma_{33}(\epsilon) - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\,\sigma(\epsilon)\right) \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} \epsilon^2\rho\ddot{u}_{\alpha}(\epsilon) = \partial_{\beta}\sigma_{\alpha\beta}(\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}\partial_3\sigma_{\alpha 3}(\epsilon) + F_{\alpha} \\ \epsilon\,\rho\ddot{u}_3(\epsilon) = \partial_{\beta}\sigma_{3\beta}(\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}\partial_3\sigma_{33}(\epsilon) + \epsilon\,F_3 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega$$

c'est à dire :

$$\left.\begin{array}{l} \epsilon^3\rho\,\ddot{u}_{\alpha}(\epsilon) = \epsilon\,\partial_{\beta}\sigma_{\alpha\beta}(\epsilon) + \partial_3\sigma_{\alpha 3}(\epsilon) + \epsilon\,F_{\alpha} \\ \epsilon^3\rho\,\ddot{u}_3(\epsilon) = \epsilon\,\partial_{\beta}\sigma_{3\beta}(\epsilon) + \partial_3\sigma_{33}(\epsilon) + \epsilon^2\,F_3 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega$$

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\beta\dot{\theta}(\epsilon) = \frac{k}{T_0}\left(\partial_{\alpha\alpha}\theta(\epsilon) + \frac{1}{\epsilon^2}\partial_{33}\theta(\epsilon)\right) - \frac{E\,\alpha}{1-2\nu}\left(\mathrm{tr}\,e(\dot{u}(\epsilon)) + \frac{1}{\epsilon^2}\partial_3\dot{u}_3(\epsilon)\right) \quad \text{dans } \Omega$$

Les conditions aux bords s'écrivent :

$$\sigma_{\alpha 3}(\epsilon) = \pm\,\epsilon\,G^{\pm}_{\alpha} \text{ sur } \Gamma^{\pm}$$

$$\sigma_{33}(\epsilon) = \pm\,\epsilon^2\,G^{\pm}_3 \text{ sur } \Gamma^{\pm}$$

$$\frac{k}{\epsilon}\partial_3\theta(\epsilon)n_3 + \epsilon\gamma(\theta(\epsilon) - \theta^{\pm}) = \epsilon Q^{\pm} \text{ sur } \Gamma^{\pm}$$

$$\theta(\epsilon) = 0 \text{ sur } \Gamma^{\ell}$$

$$u(\epsilon) = 0 \text{ sur } \Gamma^{\ell}$$

Les conditions initiales sont inchangées.

17. Formulation variationnelle :

Loi de comportement :

$\forall\ \psi \in Y,$

$$\int_\Omega e_{ij}(u(\epsilon))\ \psi_{ij}dx = \int_\Omega\left(\frac{1+\nu}{E}\ \sigma_{\alpha\beta}(\epsilon) - \frac{\nu}{E}\ \mathrm{Tr}\sigma(\epsilon)\delta_{\alpha\beta} + \alpha\theta(\epsilon)\delta_{\alpha\beta}\right)\psi_{\alpha\beta}$$
$$+ 2\epsilon\ \frac{1+\nu}{E}\int_\Omega \sigma_{\alpha3}(\epsilon)\psi_{\alpha3} + \epsilon^2\int_\Omega\left(\frac{1}{E}\ \sigma_{33}(\epsilon) - \frac{\nu}{E}\ \mathrm{tr}\ \sigma(\epsilon) + \alpha\theta(\epsilon)\right)\psi_{33}$$

Equation du mouvement :

$\forall\ (W) \in \mathbb{H},$

$$\int_\Omega \sigma_{\alpha3}(\epsilon)\partial_3W_\alpha + \int_\Omega\sigma_{33}(\epsilon)\partial_3W_3 + \epsilon\left[\int_\Omega\sigma_{\alpha\beta}(\epsilon)\partial_\beta W_\alpha + \int_\Omega\sigma_{3\beta}(\epsilon)\partial_\beta W_3 - \int_\Omega F_\alpha W_\alpha - \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_\alpha\ W_\alpha\right]$$
$$+ \epsilon^2\left[\int_\Omega \rho\ddot{u}_3(\epsilon)W_3 - \int_\Omega F_3W_3 - \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_3\ W_3\right] + \epsilon^3\int_\Omega \rho\ddot{u}_\alpha(\epsilon)\ W_\alpha = 0$$

Equation de la chaleur :

$\forall\ Z \in H,$

$$\frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_3\theta(\epsilon)\partial_3 Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega\partial_3\dot{u}_3(\epsilon)Z + \epsilon^2\left[\int_\Omega \beta\dot{\theta}(\epsilon)\ Z + \frac{k}{T_0}\int_\Omega\partial_\alpha\theta(\epsilon)\partial_\alpha Z\right.$$
$$\left. + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega\partial_\alpha\dot{u}_\alpha(\epsilon)Z + \frac{\gamma}{T_0}\int_\Omega(\theta(\epsilon) - \theta^\pm)Z - \frac{1}{T_0}\int_{\Gamma^\pm} Q^\pm Z\right] = 0.$$

On pose le développement des termes inconnus suivant les puissances de ϵ donné en (1).

18. Développement à l'ordre ϵ^0 :

18.1. Formulation variationnelle pour les termes d'ordre ϵ^0 :

En identifiant les coefficients des termes en ϵ^0, il vient :

$$\forall\ (\psi_{\alpha\beta}) \in Y,\ \int_\Omega\left(\frac{1+\nu}{E}\ \sigma^0_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\ \mathrm{Tr}\sigma^0\delta_{\alpha\beta} + \alpha\theta^0 - e_{\alpha\beta}(u^0)\right)\psi_{\alpha\beta} = 0 \tag{6a}$$

$$\forall\ (\psi_{\alpha3}) \in Y,\ \int_\Omega\ (\partial_\alpha u^0_3 + \partial_3 u^0_\alpha)\ \psi_{\alpha3} = 0 \tag{6b}$$

$$\forall\ (\psi_{33}) \in Y,\ \int_\Omega\partial_3 u^0_3\ \psi_{33} = 0 \tag{6c}$$

$$\forall\ (W_\alpha) \in \mathbb{H},\ \int_\Omega\sigma^0_{\alpha3}\partial_3 W_\alpha = 0 \tag{6d}$$

$$\forall\ (W_3) \in \mathbb{H},\ \int_\Omega\ \sigma^0_{33}\ \partial_3 W_3 = 0 \tag{6e}$$

$$\forall\ Z \in H,\ \frac{k}{T_0}\int_\Omega\partial_3\theta^0\partial_3 Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega\partial_3\dot{u}^0_3\ Z = 0 \tag{6f}$$

18.2. Forme de u^0 :

(6b) et (6c) sont les équations habituelles. u^0 **est un champ de** Kirchhoff-Love :

$$u^0_\alpha = \zeta^0_\alpha - x_3\partial_\alpha\zeta^0_3 \qquad\qquad \zeta^0_\alpha \in H^2(0,T,H^1_0(\omega) \cap H^4(\omega))$$

où

$$u^0_3 = \zeta^0_3 \qquad\qquad \zeta^0_3 \in H^2(0,T,H^2_0(\omega) \cap H^4(\omega))$$

18.3. Forme de θ^0 :

$$(6f) \Longleftrightarrow \quad - \int_\Omega \partial_{33}\theta^0 Z + \int_{\Gamma^\pm} \partial_3\theta^0 n_3 Z = 0$$

donc $\partial_{33}\theta^0 = 0$ d'où $\theta^0 = \xi^0 + x_3\tilde{\xi}^0$

or, $\partial_3\theta^0 = 0$ sur $\Gamma^\pm$, d'où $\theta^0 = \xi^0 \in H^1(0,T,H^1_0(\omega))$.

18.4. Calcul de σ^0_{i3} :

(6d) $\Rightarrow$ $\partial_3\sigma^0_{\alpha 3} = 0$ dans Ω. Or, $\sigma^0_{\alpha 3} = 0$ sur $\Gamma^\pm$ donc $\sigma^0_{\alpha 3} \equiv 0$ **dans** Ω.

De même, (6e) $\Rightarrow$ $\sigma^0_{33} \equiv 0$ dans Ω.

18.5. Calcul de $\sigma^0_{\alpha\beta}$:

$$(6a) \Longleftrightarrow \quad \frac{1+\nu}{E}\,\sigma^0_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma^0\delta_{\alpha\beta} + \alpha\theta^0 - e_{\alpha\beta}(u^0) = 0 \text{ car } \sigma^0_{33} \equiv 0$$

d'où $\sigma^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, n^0_{\alpha\beta}\,(x_1,x_2,t) + \frac{3}{2}\, x_3\, m^0_{\alpha\beta}\,(x_1,x_2,t)$ avec

$$n^0_{\alpha\beta} = \frac{2E}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)\,\frac{\partial_\alpha\zeta^0_\beta + \partial_\beta\zeta^0_\alpha}{2} + \nu\,\partial_\mu\zeta^0_\mu\delta_{\alpha\beta} - \alpha\,(1+\nu)\,\xi^0\delta_{\alpha\beta}\right]$$

$$\text{et} \quad m^0_{\alpha\beta} = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)}\left[(1-\nu)\,\partial_{\alpha\beta}\zeta^0_3 + \nu\,\Delta\zeta^0_3\,\delta_{\alpha\beta}\right]$$

Remarque :

Les équations (6d) et (6e) ne fournissent pas de problème **2D sur ω mais** entrainent seulement que σ^0_{i3} est identiquement nul dans Ω.

19. Développement à l'ordre ϵ^1:

19.1. Formulation variationnelle pour les termes d'ordre ϵ^1 ;

En identifiant les coefficients des termes en ϵ^1, il vient :

$$\forall\ (\psi_{\alpha\beta}) \in Y,\ \int_\Omega \left[\frac{1+\nu}{E}\,\sigma^1_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{Tr}\sigma^1\delta_{\alpha\beta} + \alpha\theta^1\delta_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta}(u^1)\right]\psi_{\alpha\beta} = 0 \qquad \textbf{(7a)}$$

$$\forall\ (\psi_{\alpha 3}) \in Y,\ \int_\Omega (\partial_\alpha u^1_3 + \partial_3 u^1_\alpha)\psi_{\alpha 3} = 0 \qquad \textbf{(7b)}$$

$$\forall\ (\psi_{33}) \in Y,\ \int_\Omega \partial_3 u^1_3\,\psi_{33} = 0 \qquad \textbf{(7c)}$$

$$\forall\ (W_\alpha) \in \mathbb{H},\ \int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\,\partial_\beta W_\alpha + \int_\Omega \sigma^1_{\alpha 3}\partial_3 W_\alpha - \int_\Omega F_\alpha W_\alpha - \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_\alpha\, W_\alpha = 0 \qquad \textbf{(7d)}$$

$$\forall\ (W_3) \in |H,\ \int_\Omega \sigma^1_{33}\ \partial_3 W_3 = 0 \tag{7e}$$

$$\forall\ Z \in H,\ \frac{k}{T_0} \int_\Omega \partial_3\theta^1 \partial_3 Z + \frac{E\ \alpha}{1-2\nu} \int_\Omega \partial_3 \dot{u}^1_3\ Z = 0 \tag{7f}$$

19.2. Forme de u^1 :

u^1 est un champ de Kirchhoff-Love :

$$u^1_\alpha = \zeta^1_\alpha - x_3 \partial_\alpha \zeta^1_3 \qquad \zeta^1_\alpha \in H^2(0,T,H^1_0(\omega) \cap H^4(\omega))$$

où

$$u^1_3 = \zeta^1_3 \qquad \zeta^1_3 \in H^2(0,T,H^2_0(\omega) \cap H^4(\omega))$$

19.3. Forme de θ^1 :

$$(7f) \iff -\frac{k}{T_0} \int_\Omega \partial_{33}\theta^1 Z + \frac{k}{T_0} \int_{\Gamma^\pm} \partial_3 \theta^1 n_3 Z = 0$$

d'où :
$$\partial_{33}\theta^1 = 0 \text{ dans } \Omega$$
$$\partial_3\theta^1 = 0 \text{ sur } \Gamma^\pm$$

Finalement, $\theta^1 = \xi^1 \in H^1(0,T,H^1_0(\omega))$

19.4. Calcul de σ^1_{33} :

(7e) $\iff \partial_3 \sigma^1_{33} = 0$ dans Ω.

or, $\sigma^1_{33} = 0$ sur $\Gamma^\pm$ donc $\sigma^1_{33} \equiv 0$ dans Ω.

19.5. Calcul de $\sigma^1_{\alpha\beta}$:

Comme à l'ordre ϵ^0, on obtient :

$$\sigma^1_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, n^1_{\alpha\beta}(x_1,x_2,t) + \frac{3}{2}\, x_3\, m^1_{\alpha\beta}\,(x_1,x_2,t)$$

avec :
$$n^1_{\alpha\beta} = \frac{2E}{1-\nu^2}\left[\ (1-\nu)\ \frac{\partial_\alpha\zeta^1_\beta + \partial_\beta\zeta^1_\alpha}{2} + \nu\ \partial_\mu\zeta^1_\mu\delta_{\alpha\beta} - \alpha(1+\nu)\xi^1\delta_{\alpha\beta}\right]$$

et :
$$m^1_{\alpha\beta} = \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\left[\ (1-\nu)\ \partial_{\alpha\beta}\zeta^1_3 + \nu\Delta\zeta^1_3\ \delta_{\alpha\beta}\right]$$

19.6. Obtention d'un problème 2D sur ω :

On choisit $W_\alpha = \eta_\alpha \in H^1_0(\omega)$.

(7d) s'écrit : $\int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\ \partial_\beta\ \eta_\alpha - \int_\Omega F_\alpha \eta_\alpha - \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_\alpha\ \eta_\alpha = 0$

d'où $-\int_\Omega \partial_\beta \left(\frac{n^0_{\alpha\beta}}{2} + \frac{3}{2}\, x_3\, m^0_{\alpha\beta}\right) \eta_\alpha - \int_\Omega F_\alpha \eta_\alpha - \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_\alpha\ \eta_\alpha = 0$

donc $\int_\omega \partial_\beta n^0_{\alpha\beta}\eta_\alpha + \int_\omega \left(\int_{-1}^1 F_\alpha dx_3\right)\eta_\alpha + \int_\omega (G^+_\alpha + G^-_\alpha)\ \eta_\alpha = 0$

donc $\partial_\beta n^0_{\alpha\beta} + \left(\int_{-1}^1 F_\alpha dx_3\right) + G^+_\alpha + G^-_\alpha = 0$ dans ω $\alpha = 1;2$ (E).

19.7. Calcul de $\sigma^1_{\alpha 3}$:

(7d) s'écrit : $-\int_\Omega \partial_\beta \sigma^0_{\alpha\beta} W_\alpha - \int_\Omega \partial_3 \sigma^1_{\alpha 3} W_\alpha + \int_{\Gamma^+_-} \sigma^1_{\alpha 3} n_3 W_\alpha - \int_{\Gamma^+_-} G^+_\alpha W_\alpha - \int_\Omega F_\alpha W_\alpha = 0$

donc : $$\partial_3 \sigma^1_{\alpha 3} = - \partial_\beta \sigma^0_{\alpha\beta} - F_\alpha = - \partial_\beta\left(\frac{n^0_{\alpha\beta}}{2} + \frac{3}{2} x_3 m^0_{\alpha\beta}\right) - F_\alpha$$

donc : $$\sigma^1_{\alpha 3} = - \partial_\beta n^0_{\alpha\beta} \frac{x_3+1}{2} - \frac{3}{4}(x_3^2-1)\partial_\beta m^0_{\alpha\beta} - \int_{-1}^{x_3} F_\alpha dz - G^-_\alpha$$

Remarque :

on pourrait choisir $W_\alpha = x_3 \partial_\alpha \eta_3$ dans l'équation (7d) afin d'obtenir une équation 2D sur ω et utiliser l'expression de $\sigma^1_{\alpha 3}$ trouvée ci-dessus mais on obtiendrait l'équation (E) dérivée par rapport à x_α.

20. Développement à l'ordre ϵ^2 :

20.1. Formulation variationnelle pour les termes d'ordre ϵ^2 :

En identifiant les coefficients des termes en ϵ^2, il vient :

$$\forall (\psi_{\alpha\beta}) \in Y, \int_\Omega \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma^2_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \mathrm{Tr}\sigma^2 \delta_{\alpha\beta} + \alpha\theta^2\delta_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta}(u^2)\right)\psi_{\alpha\beta} = 0 \tag{8a}$$

$$\forall (\psi_{\alpha 3}) \in Y, \int_\Omega \left(\partial_\alpha u^2_3 + \partial_3 u^2_\alpha - 2\frac{1+\nu}{E}\sigma^1_{\alpha 3}\right)\psi_{\alpha 3} = 0 \tag{8b}$$

$$\forall (\psi_{33}) \in Y, \int_\Omega \left(\partial_3 u^2_3 + \frac{\nu}{E} \mathrm{tr}\, \sigma^0 - \alpha\theta^0\right)\psi_{33} = 0 \qquad (\text{car } \sigma^0_{33} = 0) \tag{8c}$$

$$\forall (W_\alpha) \in \mathbb{H}, \int_\Omega \sigma^1_{\alpha\beta}\partial_\beta W_\alpha + \int_\Omega \sigma^2_{\alpha 3}\partial_3 W_\alpha = 0 \tag{8d}$$

$$\forall (W_3) \in \mathbb{H}, \int_\Omega \rho \ddot{u}^0_3 W_3 + \int_\Omega \sigma^1_{3\beta}\partial_\beta W_3 + \int_\Omega \sigma^2_{33}\partial_3 W_3 - \int_{\Gamma^+_-} G^+_3 W_3 - \int_\Omega F_3 W_3 = 0 \tag{8e}$$

$$\begin{aligned}\forall Z \in H, \ & \frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_3\theta^2\partial_3 Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega \partial_3 \dot{u}^2_3 Z - \frac{1}{T_0}\int_{\Gamma^+_-} Q^+_- Z + \int_\Omega \beta\dot{\theta}^0 Z + \frac{k}{T_0}\int_\Omega \partial_\alpha\theta^0\partial_\alpha Z \\ & + \frac{\gamma}{T_0}\int_{\Gamma^+_-}(\theta^0 - \theta^+_-) Z + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\int_\Omega \partial_\alpha \dot{u}^0_\alpha Z = 0\end{aligned} \tag{8f}$$

20.2. Forme de u^2 :

Par l'équation (8c), $\partial_3 u^2_3 = -\frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\,\sigma^0 + \alpha\theta^0 = -\frac{\nu}{E}\left(\frac{n^0_{\mu\mu}}{2} + \frac{3}{2} x_3 m^0_{\mu\mu}\right) + \alpha\xi^0$

d'où $u^2_3 = \left(-\frac{\nu}{2E} n^0_{\mu\mu} + \alpha\xi^0\right) x_3 - \frac{3\nu}{4E} m^0_{\mu\mu} x_3^2 + \zeta^2_3(x_1,x_2,t)$

avec $\zeta^2_3 \in H^2(0,T,H^4(\omega)\cap H^1_0(\omega))$.

Par l'équation (8b), $\partial_3 u^2_\alpha = -\partial_\alpha u^2_3 + 2\frac{1+\nu}{E}\sigma^1_{\alpha 3}$.

En utilisant l'expression de u^2_3 et de $\sigma^1_{\alpha 3}$, il vient :

$$\begin{aligned}u^2_\alpha = & \left(\frac{\nu}{2E}\partial_\alpha n^0_{\mu\mu} - \alpha\partial_\alpha\xi^0\right)\frac{x_3^2}{2} + \frac{\nu}{4E}\partial_\alpha m^0_{\mu\mu} x_3^3 - x_3\partial_\alpha\zeta^2_3 + 2\frac{1+\nu}{E}\left[-\partial_\beta\frac{n^0_{\alpha\beta}}{2}\frac{(x_3+1)^2}{2}\right. \\ & \left. - \frac{3}{4}\partial_\beta m^0_{\alpha\beta} x_3 \frac{x_3^2-3}{3} - \int_{-1}^{x_3}\int_{-1}^{z} F_\alpha(.,.,s)ds - x_3 G^-_\alpha\right] + \zeta^2_\alpha(x_1,x_2,t).\end{aligned}$$

avec $\zeta^2_\alpha \in H^2(0,T,H^4(\omega))$.

20.3. Forme de θ^2 :

(8f) est identique à l'équation (3f) de la première partie. **On obtient la** même expression pour θ^2 et pour l'équation de compatibilité.

20.4. Obtention de deux problèmes 2D sur ω :

Soit $W_\alpha = \eta_\alpha \in H_0^1(\omega)$

(8d) s'écrit : $\int_\Omega \sigma^1_{\alpha\beta}\, \partial_\beta \eta_\alpha = 0 = - \int_\omega \partial_\beta n^1_{\alpha\beta} \eta_\alpha$

d'où :
$$\partial_\beta n^1_{\alpha\beta} = 0 \text{ dans } \omega$$
$$\zeta^1_1 = \zeta^1_2 = 0 \text{ sur } \partial\omega$$

le choix de $W_3 = \eta_3 \in H_0^1(\omega)$ dans (8e) fournit l'équation :
$$2\,\rho\, \ddot{\zeta}^o_3 - \int_{-1}^1 (\partial_\beta \sigma^1_{3\beta} + F_3) dx_3 = G_3^+ + G_3^- \quad \text{sur } \omega.$$

En explicitant le terme $\sigma^1_{3\beta}$, cette équation s'écrit encore :
$$2\,\rho\, \ddot{\zeta}^o_3 + \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\, \Delta^2 \zeta^o_3 = \int_{-1}^1 x_3 \partial_\alpha F_\alpha + \int_{-1}^1 F_3 dx_3 + \partial_\alpha (G^+_\alpha - G^-_\alpha) + G_3^+ + G_3^- \ \textbf{dans } \omega$$
$$\zeta^o_3 = \partial_\alpha \zeta^o_3 = 0 \text{ sur } \partial\omega$$

20.5. Calcul de σ^2_{i3} :

$$(8d) \iff - \int_\Omega \partial_\beta \sigma^1_{\alpha\beta} W_\alpha - \int_\Omega \sigma^2_{\alpha 3} W_\alpha + \underbrace{\int_{\Gamma^\pm} \sigma^2_{\alpha 3} n_3 W_\alpha}_{=0} = 0$$

donc $\partial_3 \sigma^2_{\alpha 3} = - \partial_\beta \sigma^1_{\alpha\beta} = - \partial_\beta \left(\frac{n^1_{\alpha\beta}}{2} + \frac{3}{2} x_3\, m^1_{\alpha\beta} \right)$

d'où $\sigma^2_{\alpha 3} = - \partial_\beta \frac{n^1_{\alpha\beta}}{2} (x_3+1) - \frac{3}{4} \partial_\beta\, m^1_{\alpha\beta}\, (x_3^2 - 1)$

$$(3e) \iff \int_\Omega \rho \ddot{u}^o_3 W_3 - \int_\Omega \partial_\beta \sigma^1_{3\beta} W_3 - \int_\Omega \partial_3 \sigma^2_{33} W_3 + \underbrace{\int_{\Gamma^\pm} \sigma^2_{33} n_3 W_3 - \int_{\Gamma^\pm} G_3^\pm W_3}_{=0} - \int_\Omega F_3 W_3 = 0$$

donc $\partial_3 \sigma^2_{33} = \rho\, \ddot{u}^o_3 - \partial_\beta \sigma^1_{3\beta} - F_3$

et $\sigma^2_{33} = (x_3+1)\, \rho\, \ddot{\zeta}^o_3 - \int_{-1}^{x_3} (\partial_\beta \sigma^1_{3\beta} + F_3) - G_3^-$

20.6. Calcul de $\sigma^2_{\alpha\beta}$:

L'équation (8a) entraine :
$$\sigma^2_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu}\, e_{\alpha\beta}(u^2) + \frac{E\nu}{1-\nu^2}\, \text{tr}\, e(u^2)\, \delta_{\alpha\beta} - \frac{E\alpha}{1-\nu}\, \theta^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1+\nu}\, \sigma^2_{33}\, \delta_{\alpha\beta}$$

21. Remarques :

La nouvelle mise à l'échelle des composantes du tenseur des contraintes apporte des modifications dans l'écriture des équations sous forme variationnelle. On retrouve les mêmes termes qu'auparavant mais avec des puissances de ϵ différentes, si bien que l'identification des coefficients de ces puissances conduit à des équations sous forme variationnelle qui mêlent les termes de façon différente.

Ainsi, à l'ordre ϵ^0, on n'obtient plus de problème 2D sur ω.

A l'ordre ϵ^1, on n'obtient seulement que deux des trois équations habituellement obtenues et celles-ci portent sur les termes d'ordre ϵ^0 (ce qui est normal puisque l'ordre ϵ^0 ne nous en avait pas fourni) mais ces équations ne correspondent pas aux équations couplées souhaitées.

La méthode des développements asymptotiques pour l'ordre supérieur mène à des résultats identiques à ceux déjà obtenus dans les parties précédentes. En particulier, on retrouve l'équation d'évolution sur u_3^0 que les ordres précédents n'avaient pas fournie.

CONCLUSION :

On constate que les différents changements d'échelle conduisent toujours à des équations du même type, d'où une certaine cohérence dans nos résultats, y compris dans la dernière partie où, malgré une formulation variationnelle modifiée par un nouveau changement d'échelle sur les contraintes, on aboutit à des résultats analogues.

Rappelons le type d'équations 2D sur ω obtenues à l'ordre ϵ^0 :

$$2\,\rho\,\ddot{\zeta}_3^0 + \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\left(\Delta^2\zeta_3^0 + \alpha\,(1+\nu)\,\Delta\,\tilde{\xi}^0\right) = 0 \text{ dans } \omega$$

$$\zeta_3^0 = \partial_\alpha\zeta_3^0 = 0 \text{ sur } \partial\omega$$

et

$$\partial_\beta n_{\alpha\beta}^0 = -\int_{-1}^{1} F_\alpha dx_3 - (G_\alpha^+ + G_\alpha^-) \text{ dans } \omega$$

$$\zeta_1^0 = \zeta_2^0 = 0 \text{ sur } \partial\omega$$

avec $$n_{\alpha\beta}^0 = \frac{2E}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)\,\frac{\partial_\alpha\zeta_\beta^0+\partial_\beta\zeta_\alpha^0}{2} + \nu\,\partial_\mu\zeta_\mu^0\delta_{\alpha\beta} - \alpha\,(1+\nu)\,\xi^0\delta_{\alpha\beta}\right]$$

Le terme $\tilde{\xi}^0$ qui figure dans la première de ces équations n'est présent que lorsque la température θ^0 comporte une partie en x_3. Dans ce cas, le terme de température se détermine algébriquement; c'est aussi ce qui se produit lorsque l'on utilise des méthodes mécaniques (cf [Henry;1976]).

Les mises à l'échelle que nous avons considérées se distinguent par le choix du paramètre γ^ϵ ($\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma, \gamma, \gamma/\epsilon$) sauf pour la dernière partie où la distinction porte sur le changement d'échelle des contraintes.

Ces choix nous paraissent représentatifs et nous laissent penser que d'autres hypothèses sur le paramètre γ^ϵ produiraient encore des équations de même nature.

En conséquence, l'obtention du système d'équations couplées souhaité, par la méthode des développements asymptotiques, ne paraît pas évidente pour notre problème.

Références :

[Blanchard & Francfort ;1987] : Asymptotic thermoelastic behavior of flat plates
D. Blanchard et G.A. Francfort
Quaterly of Applied Mathematics, 1987.

[Henry ; 1976] : Théorème d'existence et d'unicité de la flexion simple d'une plaque mince thermoélastique
Thèse de J.J. Henry présentée à Paris VI en avril 1976.

[Inan ; 1972] : Inan E.
Coupled theory of thermoelastic plates
Acta Mechanica 14 PI 29 (1972).

[Damlamian ; 1987] : A. Damlamian
Homogenization limits of the equations of elasticity in thin domains
SIAM J. Math. Anal. Vol 18 N°2 Mars 1987.

[Raoult ; 1980] : A. Raoult
Contributions à l'étude des modèles d'évolution de plaques et à l'approximation d'équations d'évolution linéaires du second ordre par des méthodes multipas
thèse de 3èmecycle présentée à Paris VI en décembre 1980.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique